SIF5003 Matematikk 1
9. desember 1998

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter: 1, 2, 3, 4, 5ab, 6, 7ab, 8ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **i)** alternativ (1), **ii)** alternativ (3).

$\boxed{2}$ Her er sylinderskallmetoden best. Volumet av et sylinderskall er $dV = 2\pi rh\,dx$ der $r = \pi/4 - x$ og $h = y_2 - y_1 = \cos x - \sin x$. Volumet av rotasjonslegemet blir da, ved delvis integrasjon,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{*}^{**} dV = 2\pi \int_0^{\pi/4} (\pi/4 - x)(\cos x - \sin x)\,dx \\
&= 2\pi \Big[(\pi/4 - x)(\sin x + \cos x) - \int (-1)(\sin x + \cos x)\,dx\Big]_0^{\pi/4} \\
&= 2\pi \Big[(\pi/4 - x)(\sin x + \cos x) + (-\cos x + \sin x)\Big]_0^{\pi/4} = -2\pi(\pi/4 - 1) = \pi(2 - \pi/2).
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ La $x(t)$ og $y(t)$ være x- og y-koordinaten til bilen og bussen ved tidspunktet t, med veikrysset i origo. Avstanden z i luftlinje mellom bilen og bussen er da gitt ved

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Ved derivasjon mhp. t får vi

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Når $x = 0{,}3$, $dx/dt = -70$, $y = 0{,}4$ og $dy/dt = 60$, er $z = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5$ og

$$2 \cdot 0{,}5\frac{dz}{dt} = 2 \cdot 0{,}3 \cdot (-70) + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 60 \qquad \text{som gir} \qquad \frac{dz}{dt} = 6.$$

Avstanden mellom bil og buss *øker* altså med 6 km/h ved dette tidspunktet.

$\boxed{4}$ Vi skal vise formelen

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \qquad n \geq 1,$$

ved induksjon. For $n = 1$ er formelen rett siden venstresiden bare har ett ledd $1 \cdot 1! = 1$ og høyresiden er $2! - 1 = 1$. Anta som induksjonshypotese at

$$(*) \qquad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Da er

$$\begin{aligned}
&1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&\quad = \big[1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k\cdot k!\big] + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&\quad \overset{(*)}{=} \big[(k+1)! - 1\big] + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+2)\cdot(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Ved induksjon følger at den oppgitte formelen er riktig for alle hele tall $n \geq 1$.

$\boxed{5}$ **a)** Differensialligningen er

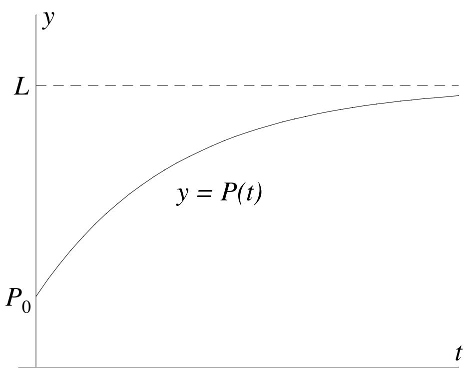
$$\frac{dP}{dt} = k(L-P), \qquad P(0) = P_0.$$

Ligningen er separabel (og har den konstante løsningen $P = L$). For $L - P \neq 0$ får vi, ved separarasjon av de variable og integrasjon,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dP}{L-P} &= \int k\,dt \\
-\ln(L-P) &= kt + C \\
L - P &= e^{-kt-C} \\
P &= L - Ae^{-kt} \qquad (A = e^{-C}).
\end{aligned}$$

Med $P(0) = P_0$ blir $A = L - P_0$ og

$$P(t) = L - (L - P_0)e^{-kt}.$$



b) Fortjenesten F, hvis slaktevekten er P, er

$$F(t) = b\cdot P(t) - a\cdot t.$$

For å maksimalisere F deriverer vi mhp. t og bruker uttrykket for dP/dt fra **a)**:

$$\frac{dF}{dt} = b\cdot\frac{dP}{dt} - a = b\cdot k(L-P) - a = bkL - bkP - a.$$

Vi ser at $dF/dt = 0$ når

$$P = \frac{bkL - a}{bk} = L - \frac{a}{bk},$$

og dette gir maksimum siden

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[b\cdot k(L-P) - a\Big] = -bk\frac{dP}{dt} = -bk^2(L-P) < 0.$$

Vi får maksimal fortjeneste ved å slakte dyret når det veier $P = L - a/(bk)$ kg.
(Hvis $L - a/(bk) \leq P_0$ må vi slakte straks, dvs. når $t = 0$.)

6 Rekken er alternerende, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ med $a_n = (n-1)/n^2$. Vi sjekker at a_n er avtagende og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Med

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{er} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{x-2}{x^3} < 0 \quad \text{for } x > 2.$$

Funksjonen $f(x)$ (for $x \geq 2$), og følgelig $a_n = f(n)$, er altså avtagende. Siden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

er rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergent ifølge alternerende rekkers test.

For å avgjøre om konvergensen er absolutt eller betinget må vi undersøke rekken $\sum a_n$. Vi kan bruke grensesammenligningstesten og sammenligner med rekken $\sum b_n = \sum 1/n$ (den harmoniske rekken):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)/n^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (> 0).$$

Siden den harmoniske rekken er divergent, som p-rekke med $p = 1 (\leq 1)$, er $\sum a_n$ divergent. (Vi kunne også brukt integraltesten for å vise at $\sum a_n$ divergerer.) Rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ er altså betinget konvergent.

Rekkens "neste ledd" er $(-1)^{11}a_{10} = -9/100$. Ifølge alternerende rekkers restleddestimat er da $S - S_9$ negativ og $|S - S_9| < a_{10}$. Vi har altså

$$-0{,}09 < S - S_9 < 0.$$

7 **a)** Her er

$$f(0) = \int_0^0 \frac{\arctan t}{t^6+1}\,dt = 0, \qquad \text{og} \qquad f'(x) = \frac{\arctan x}{x^6+1}$$

ifølge integralregningens fundamentalteorem. Ved derivasjon får vi

$$f''(x) = \frac{(x^6+1)/(x^2+1) - 6x^5 \arctan x}{(x^6+1)^2}.$$

Dermed er

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \quad \text{og} \quad f''(0) = 1,$$
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 = \tfrac{1}{2}x^2.$$

b) Taylors formel (med Taylorpolynomet fra **a)**) gir

$$f(0{,}4) = P_2(0{,}4) + R_2(0{,}4) = 0{,}080 + \frac{f'''(z)}{3!}0{,}4^3 \qquad \text{der } 0 \leq z \leq 0{,}4.$$

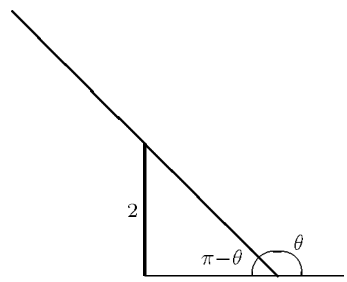
Siden $-1 \leq f'''(z) \leq 0$, blir $0{,}069 \leq f(0{,}4) \leq 0{,}080$.

Ved å bruke Simpsons metode med $n = 4$ delintervaller og skrittlengde $\Delta t = 0{,}1$ får vi

$$f(0{,}4) = \int_0^{0{,}4} \frac{\arctan t}{t^6+1}\,dt \approx S_4 = \frac{\Delta t}{3}\Big(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + y_4\Big),$$
$$f(0{,}4) \approx \frac{0{,}1}{3}\Big(0 + 4\cdot 0{,}0997 + 2\cdot 0{,}1974 + 4\cdot 0{,}2912 + 0{,}3790\Big) = 0{,}0779\,,$$
$$f(0{,}4) \approx 0{,}078.$$

$\boxed{8}$ **a)** La $s = 4 - r$ være lengden av stigen mellom bakken og muren. Av figuren ser vi at $2 = s \cdot \sin(\pi - \theta)$. Følgelig er

$$r = 4 - s = 4 - \frac{2}{\sin(\pi - \theta)} = 4 - \frac{2}{\sin\theta}.$$



Videre ser vi at $\theta = \pi/2$ når stigen er loddrett, og at $\sin(\pi - \theta) = 2/4$, $\pi - \theta = \pi/6$, $\theta = 5\pi/6$ når stigens topp berører plankegjerdet. Ergo er $\theta \in \big[\pi/2, 5\pi/6\big]$.

b) Husveggen har ligning $x = -1$, og for x-koordinaten til stigens topp har vi

$$x = r\cos\theta = \Big(4 - \frac{2}{\sin\theta}\Big)\cos\theta = 4\cos\theta - 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}.$$

Her er x negativ, og stigen vil gå klar av huset hvis $x_{\min} > -1$. Siden $x = 0$ når $\theta = \pi/2$ og når $\theta = 5\pi/6$, må minimumsverdien komme når $dx/d\theta = 0$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\sin\theta - 2\frac{\sin\theta \cdot (-\sin\theta) - \cos\theta \cdot \cos\theta}{\sin^2\theta} = 2\frac{-2\sin^3\theta + 1}{\sin^2\theta}.$$

Vi ser at $dx/d\theta = 0$ når $\sin^3\theta = 1/2$, $\sin\theta = 2^{-1/3}$. Siden θ er i 2. kvadrant, er $\theta \approx 2{,}22$ $(127{,}5°)$. Da er $\cos\theta = -\sqrt{1 - 2^{-2/3}} \approx -0{,}6083$ og følgelig $x_{\min} \approx -0{,}90$ (m). Den eksakte verdien er

$$\begin{aligned} x_{\min} &= -(4 - 2 \cdot 2^{1/3})(1 - 2^{-2/3})^{1/2} \\ &= -2 \cdot 2^{1/3}(2^{2/3} - 1)\frac{(2^{2/3} - 1)^{1/2}}{2^{1/3}} = -2(2^{2/3} - 1)^{3/2}. \end{aligned}$$

Stigen vil altså ha en klaring til husveggen på $1 - 2(2^{2/3} - 1)^{3/2} \approx 0{,}10$ meter.

Eksempel på føring, eksamen SIF5003, 1999-08-02

Oppg. 1

a)

(i) $\ln(-x) > 2$

Eksponensiering gir

$$-x > e^2$$

og derav følger at $\underline{\underline{x < -e^2}}$ løser ulikheten.

(ii) $\frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{4}$

Omforming gir

$$(x-1)^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| > 2$$

som medfører at

$$x-1 > 2 \quad \text{eller} \quad 1-x > 2$$

Disse er oppfylt for

$$\underline{\underline{x < -1 \quad \text{eller} \quad x > 3}}$$

b) (i) Skal bestemme grenseverdien

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

Har at

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \underline{1+\tan^2 x}$$

Grenseverdien L er et $0/0$-uttrykk, så L'Hôpitals regel gir

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \tan^2 x}{3x^2}$$

Dette er fremdeles $\frac{0}{0}$-uttrykk. Ny anvendelse av L'Hôpitals regel gir derfor

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{6x}$$

Dette er nok engang et $\frac{0}{0}$-uttrykk, men en siste anvendelse av L'Hôpitals regel gir

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 2(1+\tan^2 x) - 6\tan^2 x(1+\tan^2 x)}{6} = -\frac{3}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Oppg. 1

b) (ii) Skal bestemme grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} (e^{2x} - 2x)^{1/x}$$

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = (e^{2x} - 2x)^{1/x}, \quad x > 0$$

Har da at

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln f(x)}$$

Ser derfor på

$$\tilde{L} = \lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(e^{2x} - 2x)$$

Ved L'Hôpitals regel får vi

$$\tilde{L} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}-2x}(2e^{2x} - 2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}-2x}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - 2xe^{-2x}} = 2\cdot 1 = \underline{2}$$

fordi $\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$

Dette gir at

$$L = e^{\tilde{L}} = \underline{\underline{e^2}}$$

Oppg. 2

a) Skal vise at ligningen

$$2x = \cos x \qquad (*)$$

har én og bare én løsning.

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 2x - \cos x$$

slik at en løsning av $(*)$ er en løsning av $f(x) = 0$

Har at $f'(x) = 2 + \sin x > 0$, så f er strengt voksende og kan derfor ha maksimalt ett nullpunkt.

Videre er f en kontinuerlig funksjon og vi har

$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = -\pi$$

og

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \pi$$

så ved mellomverdisetningen (intermediate value property) har f minst ett nullpunkt.

Tilsammen gir dette at f har nøyaktig ett nullpunkt, hvilket betyr at $(*)$ har nøyaktig én løsning. □

Newtons metode for løsning av $(*)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \cos x_n}{2 + \sin x_n}$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi

n	x_n
0	0.5
1	0.4506267
2	0.4501836
3	0.4501836

Hvilket betyr at med fem sikre sifre er løsningen av $(*)$

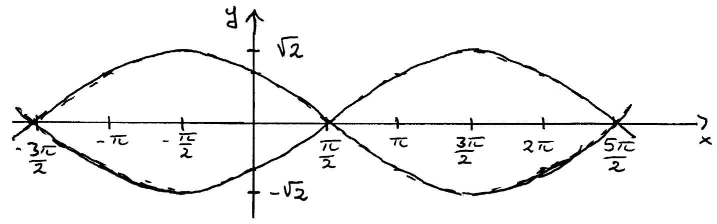
$$\underline{\underline{x = 0.45018}}$$

Oppg. 2

b) Punkter på kurven

$$y^2 + \sin x = 1$$

som ligger nærmest origo.



La $P(x,y)$ være et punkt på kurven.
Avstanden r fra origo til P er gitt ved

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - \sin x$$

Vi søker x som minimerer r^2. Derivasjon gir

$$2x - \cos x = 0 \qquad (*)$$

Det finnes ingen øvre begrensning på r, så et ekstremalpunkt for r er et minimum.

Fra a) har vi at en tilnærmet løsning av $(*)$ er

$$\underline{x = 0.45018}$$

Innsatt dette gir

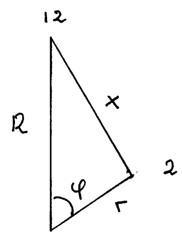
$$y = \pm\sqrt{1 - \sin x} = \pm 0.75158$$

så punktene på kurven som ligger nærmest origo er

$$\underline{\underline{(x,y) = (0.45018, \pm 0.75158)}}$$

Oppg. 3

Endring pr. tid for avstanden mellom spissene på urviserne på Big Ben.



$R = 4$ m
$r = 2$ m
$\varphi = 2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

Hastighet for minuttviser:

$$\omega_1 = -2\pi / h$$

Hastighet for timeviser:

$$\omega_0 = -\frac{2\pi}{12} / h = -\frac{\pi}{6} / h$$

Ved cosinus-setningen har vi at

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$$

hvor x er avstanden mellom viserspissene.

Implisitt derivasjon gir

$$2x\frac{dx}{dt} = 2Rr\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Rr\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}$$

Har at

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \omega_0 = -2\pi/h - (-\frac{\pi}{6}/h) = \underline{-\frac{11}{6}\pi/h}$$

Videre er

$$\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-3/4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

slik at

$$a = \frac{4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{16+4-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}}\,m = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\,m = \underline{2\,m}$$

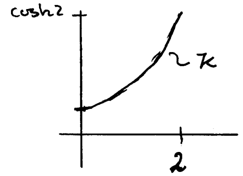
Dette betyr at

$$\frac{dx}{dt} = 2m\cdot(-\frac{11}{6}\pi/h) = \underline{\underline{-\frac{11}{3}\pi\ m/h}}$$

Oppg. 4

$\mathcal{K}$ er kurven

$$y = \cosh x\ ,\quad 0 \le x \le 2$$



Lengde av $\mathcal{K}$:

$$s = \int_*^{**} ds$$

hvor

$$ds = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx = \cosh x\,dx$$

Dette gir

$$s = \int_0^2 \cosh x\,dx = [\sinh x]_0^2 = \underline{\underline{\sinh 2}}$$

Areal av rotasjonsflaten dannet ved rotasjon av $\mathcal{K}$ om x-aksen:

$$A = \int_*^{**} 2\pi y\,ds = 2\pi\int_0^2 \cosh x\cdot\cosh x\,dx = 2\pi\int_0^2\cosh^2 x\,dx$$

Definisjon av hyperbolsk cosinus gir

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})$$

hvilket gir

$$A = \frac{\pi}{2}\int_0^2 (e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})+2x\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left[\sinh 2x + 2x\right]_0^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(\sinh 4 + 4)}}$$

Oppg. 5

a)

(i) Undersøkelse av konvergens for

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Rekken er alternerende med $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ så rekken konvergerer.

Ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

og sammenligner med den divergente harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} = 1$$

så rekken konvergerer ikke absolutt ved grensesammenligning

Dette betyr at $\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \text{ konvergerer betinget.}}}$

(ii) Undersøkelse av konvergens for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$$

La $$S_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)^n}{(2n+2)^n}$$

$$= \frac{2n+1}{\cancel{n}+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Ser så på

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+1/n} \Big/ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \underline{\frac{2}{e} < 1}$$

Ved forholdskriteriet konvergerer derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$$

absolutt.

Oppg. 5

b) Konvergensintervall for potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

La $$S = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \frac{(x+4)^{n+1}}{2n+3}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |x+4| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n}$$

$$= \frac{1}{4} |x+4|$$

Rekken konvergerer for $S < 1$, hvilket gir

$$-1 < \frac{1}{4}(x+4) < 1$$

$$\Rightarrow \underline{-8 < x < 0}$$

Sjekk av endepunkter:

<u>$x=-8$:</u>

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{(-4)^n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Sammenligner med den divergente harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} > 0$$

Ved grensesammenligningskriteriet divergerer rekken for $x=-8$

<u>$x=0$:</u>

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{4^n}{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

Vi får altså en alternerende rekke der $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, så rekken konvergerer.

Vi har altså at konvergensintervallet for

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

er

$$\underline{\underline{(-8, 0]}}$$

Oppg. 6

$P_5(x) = 1 + 3x + 5x^3 - x^5$

er Taylorpolynom, av grad 5 om $a=0$ for seks ganger deriverbar funksjon $f(x)$.

Generelt er Taylorpolynomet av grad n om $a=0$ gitt ved

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Ved sammenligning av koeffisienter får vi derfor

$$f''(0) = 2! \cdot b_2 = 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$
$$f'''(0) = 3! \cdot b_3 = 6 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$$

Vet at $|f^{(6)}(x)| \leq 72$ for alle x.

Taylors formel med restledd er

$$f(x) = P_5(x) + R_5(x) \quad , \quad R_5(x) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(z)\, x^6$$

$\Rightarrow |R_5(x)| = |f(x) - P_5(x)|$

Ønsker $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$. Dette oppnås når

$$|R_5(x)| \leq \frac{72}{720} \cdot |x|^6 \leq 10^{-7} \Rightarrow |x|^6 \leq 10^{-6} \Rightarrow \underline{|x| \leq 10^{-1}}$$

Vi er med andre ord garantert at $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$ for

$$\underline{\underline{-0.1 \leq x \leq 0.1}}$$

Oppg. 7

Halveringstid for ^{210}Po :

$$\tau = 140 \text{ dg}$$

La n være antall halveringstider for å redusere en mengde M_0 til en mengde M_1. Har da at

$$M_1 = (\tfrac{1}{2})^n M_0$$

I dette tilfellet er $M_1 = M$, $M_0 = 8M$. Dette gir

$$1 = (\tfrac{1}{2})^n \cdot 8$$

$$\Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \underline{3}$$

Tiden for å redusere $8M$ ^{210}Po til M ^{210}Po er derfor

$$t = 3\tau = 3 \cdot 140 \text{ dg} = \underline{\underline{420 \text{ dg}}}$$

SIF5003 Matematikk 1
Eksamen 08.12.1999

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

$\boxed{1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} : \textit{Divergent.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} : \textit{Absolutt konvergent.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} : \textit{Betinget konvergent.}$$

$\boxed{2}$

(i)
$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(e^t-1)}{t} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1}$$
$$= 1$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{(\arctan x)^2} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2\arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2) \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan x}$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan x} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\frac{1}{1+x^2}}$$
$$= 2$$

$\boxed{3}$ **a)** For å finne største og minste verdi til $f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$ over intervallet $[0,2]$, ser vi på den deriverte $f'''(x)$ til $f''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{12x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(1+x^4)^{\frac{5}{2}}}.$$

Vi ser at $x=1$ er det eneste nullpunktet for $f'''(x)$ i det åpne intervallet $(0,2)$. Vi sammenligner verdiene til $f''(x)$ i det kritiske punktet $x=1$ og endepunktene $x=0$ og $x=2$: $f''(0)=0$, $f''(1)=2\sqrt{2}=2.828\cdots$ og $f''(2)=\frac{152}{289}\sqrt{17}=2.168\cdots$. Av dette ser vi at

$$f''_{\text{max}} = 2\sqrt{2} \qquad f''_{\text{min}} = 0 \qquad \text{på intervallet } [0,2].$$

b) Trapesmetoden med fire delintervaller brukt på integralet

(I) $$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx\,.$$

gir $\Delta = \frac{2-0}{4} = 0.5$ (lengden på delintervallene) og delepunktene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Med $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ får vi tabellen:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	1.0000	1.0308	1.4142	2.4622	4.1231

som gir følgende tilnærmede verdi T_4 for integralet:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx T_4 &= \frac{\Delta}{2}\left(f(0) + 2\cdot f(0.5) + 2\cdot f(1.0) + 2\cdot f(1.5) + f(2.0)\right)\\ &\approx 0.25(1.0000 + 2\cdot 1.0308 + 2\cdot 1.4142 + 2\cdot 2.4622 + 4.1231)\\ &= 3.734375 \approx 3.73\,.\end{aligned}$$

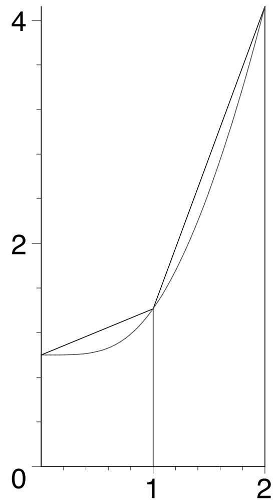
For feilen $|ET_n|$ i trapesmetoden over et intervall $[a,b]$ med n delintervaller har vi estimatet:

$$|ET_n| \le \frac{K_2(b-a)^3}{12n^2}$$

hvor K_2 er et tall slik at $K_2 \ge |f''(x)|$ for $a \le x \le b$. I vårt tilfelle er $a = 0$, $b = 2$, $n = 4$. Fra **a)** følger at $|f''(x)| \le 2\sqrt{2}$ når $0 \le x \le 2$, så vi kan ta $K_2 = 2\sqrt{2}$. Dette gir

$$|ET_4| \le \frac{2\sqrt{2}\cdot 2^3}{12\cdot 4^2} = .1178511302\cdots < 0.12\,.$$

Mao.: Feilen i trapesmetoden er mindre enn 0.12 [a]. Siden $f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} \ge 0$, er funksjonen $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ *konkav oppover*. Dette betyr at trapesmetoden gir en *for stor verdi* [b], fordi arealet under de approksimerende trapesene er større enn arealet under kurven (figuren til høyre illustrerer dette for $n = 2$).



[a]Dette gir følgende noe grove estimat for integralet (I): Siden $3.73 < T_4 < 3.74$ og $-0.12 < ET_4 < 0.12$, blir $3.61 < T_4 + ET_4 = \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx < 3.86$.

[b]Siden vi nå vet at$-0.12 < ET_4 < 0$, får vi et bedre estimat: $3.61 < \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx < 3.74$. Den eksakte verdien, avrundet til to desimaler, er 3.65.

$\boxed{4}$ Anta $x \ne 1$ og sett

$$P(n): \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\,,$$

dvs., $P(n)$ er påstand nr. n. Vi må først sjekke at påstanden $P(0)$ holder:

$$P(0): \qquad 1 = \frac{1-x}{1-x}, \qquad \text{som er riktig.}$$

Vi antar så at $P(n)$ er riktig, og viser at dette medfører at også $P(n+1)$ er riktig, dvs., vi må vise implikasjonen

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)\,.$$

For å gjøre dette, skriver vi opp påstanden $P(n+1)$ og prøver å vise at venstresiden (V.S.) i $P(n+1)$ er lik høyresiden (H.S.) i $P(n+1)$ (under forutsetning av at $P(n)$ holder):

$$P(n+1):\quad 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}, \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

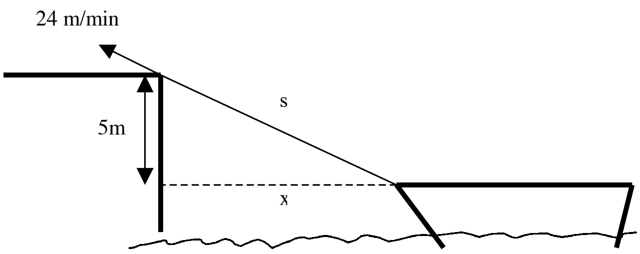
$$\text{V.S.} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1} = (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)+x^{n+1}$$

$$\overset{P(n)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} = \text{H.S.}$$

som viser at $P(n+1)$ holder (når $P(n)$ gjør det). Induksjonsbeviset er dermed ferdig.

$\boxed{5}$ Dersom $s = s(t)$ betegner taulengden (i meter) mellom ringen og baugen, og $x = x(t)$ betegner (den horisontale) avstanden (i meter) mellom baugen og kaia, har vi til enhver tid relasjonen:

$$x^2 + 5^2 = s^2\,.$$



Derivasjon av denne relasjonen mhp. tiden t gir:

$$(*) \qquad 2x\cdot\frac{dx}{dt} = 2s\cdot\frac{ds}{dt} \quad \text{dvs.} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

I det øyeblikket taulengden $s = 13\,(\text{m})$, er $x = \sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{144} = 12\,(\text{m})$. Videre er det oppgitt at $\frac{ds}{dt} = -24(\text{m/min})$. Innsetting i $(*)$ gir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{13}{12}\cdot(-24) = -26\,(\text{m/min})\,,$$

dvs., avstanden mellom båten og kaia avtar med 26 m/min.

$\boxed{6}$ Dersom $T = T(t)$ er temperaturen på Kjell Magnes kontor ved tiden t, og T_{ute} er den konstante utetemperaturen, sier Newtons lov:

$$\text{(N)} \qquad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ute}})$$

hvor k er en positiv konstant. Vi setter foreløpig $T(0) = T_0$, og løser differensialligningen (N) ved separasjon av de variable:

$$\int \frac{dT}{T-T_{\text{ute}}} = -k\int dt \Rightarrow \ln(T-T_{\text{ute}}) = -kt + C \Rightarrow T - T_{\text{ute}} = e^C e^{-kt}$$

$$T = T_{\text{ute}} + e^C e^{-kt}$$

Innsetting for $t = 0$ i den siste ligningen gir:

$$T_0 = T_{\text{ute}} + e^C \Rightarrow e^C = T_0 - T_{\text{ute}}$$
$$T = T_{\text{ute}} + (T_0 - T_{\text{ute}})e^{-kt}$$

Vi lar $t = 0$ svare til klokken 00.00 den 1. januar 2000, og bruker tallverdiene fra oppgaven: $T_0 = 19.0$, $T_{\text{ute}} = -36.9$. Dette gir:

$$T = -36.9 + (19.0 - (-36.9))e^{-kt} = 55.9 \cdot e^{-kt} - 36.9$$

Bruker så at $T = 10.8$ klokken 01.00, dvs. når $t = 1$ (vi måler t i timer):

$$10.8 = (55.9)e^{-k\cdot 1} - 36.9 \Rightarrow e^{-k} = \frac{10.8 + 36.9}{55.9} = \frac{47.7}{55.9} \Rightarrow k = \ln 55.9 - \ln 47.7$$
$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9$$

Bestemmer til slutt når vannet i glasset begynner å fryse, dvs. når $T = 0$:

$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9 = 0 \Rightarrow e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} = \frac{36.9}{55.9}$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln 55.9 - \ln 36.9}{\ln 55.9 - \ln 47.7} \approx 2.6183 \approx 2 \text{ timer og } 37 \text{ min.},$$

mao.: *Vannet begynner å fryse ca. kl. 02.37 den 1. januar 2000.*

$\boxed{7}$ Vi bruker forholdstesten på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})x^n$, og får, med $u_n = \sin(\frac{1}{n})x^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1}}{\sin(\frac{1}{n})|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})}|x| \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{1}{n+1})(-\frac{1}{(n+1)^2})}{\cos(\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})}|x|$$
$$= \frac{\cos 0}{\cos 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}|x| = |x|\,.$$

I følge forholdstesten har vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$ og divergerer når $|x| > 1$, dvs.: *Konvergensradien* $R = 1$.
Endepunkter.
$\underline{x = 1}$: Vi får den positive rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$. Grensesammenligning med den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1} = 1\,.$$

Siden $1 > 0$ og den harmoniske rekken er divergent, følger ved grensesammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ er *divergent*.
$\underline{x = -1}$: Her får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n})$. Med $a_n = \sin(\frac{1}{n})$ har vi $a_{n+1} = \sin(\frac{1}{n+1}) < \sin(\frac{1}{n}) = a_n$, og $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin(\frac{1}{n}) = 0$, så rekken er *konvergent* i følge testen for alternerende rekker.

$\boxed{8}$ Siden vi har rotasjon om x-aksen, bruker vi formelen $A = \int 2\pi y\, ds$ for overflatearealet til rotasjonslegemet. Vi har $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$, som med $x = \sin t$ og $y = 2 + \cos t$ gir $ds = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = dt$, så

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y\, ds = \int_0^{2\pi} 2\pi(2 + \cos t)\, dt = 2\pi[2t + \sin t]_0^{2\pi} = 2\pi[2\cdot 2\pi + 0 - 0]$$
$$= 8\pi^2$$

$\boxed{9}$ Siden $V = \int_0^y \pi(g(u))^2\,du$, har vi $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot \frac{dy}{dt}$ ved kjerneregelen. Dersom vi kombinerer dette med Torricellis lov og opplysningen $\frac{dy}{dt} = -c$ (hvor c er en positiv konstant), får vi:

$$\frac{dV}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot \frac{dy}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot (-c) = -k\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow g(y) = \sqrt{\frac{k}{\pi c}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

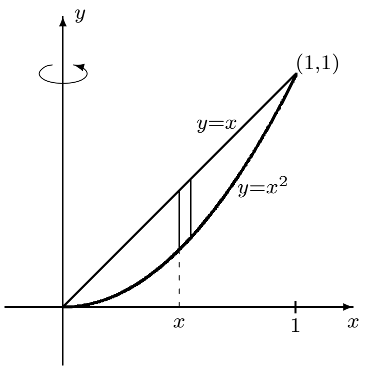
Vi bruker så opplysningen om at $V = 1$ når $y = 1$:

$$V_{y=1} = \int_0^1 \pi g(u)^2\,du = \int_0^1 \pi \frac{k}{\pi c} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{k}{c}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{k}{c}\cdot\frac{2}{3} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{k}{c} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \quad g(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

1 (i) Vi har $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x}=2^\infty=\infty$ og $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x}=2^{-\infty}=0$.
Grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x}$ eksisterer følgelig ikke.

(ii)
$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t^2}-t\right)=\lim_{t\to\infty} t\left(\sqrt{1/t+1}-1\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1/t+1}-1}{1/t}\qquad (u=1/t)$$
$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{u+1}-1}{u}\overset{\text{“0/0”}}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{1/(2\sqrt{u+1})}{1}=\frac{1}{2}$$

2



Volumet V ved rotasjon om y-aksen kan vi finne f.eks. ved hjelp av sylinderskallmetoden:
$$V=\int_*^{**}2\pi r\,dA=\int_0^1 2\pi x(x-x^2)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1(x^2-x^3)\,dx=\frac{\pi}{6}.$$

Overflatearealet er $A=A_1+A_2$ der av A_1 er arealet av rotasjonsparaboloiden og A_2 er arealet av kjegleflaten:

$$A_1=\int_*^{**}2\pi r\,ds=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\left[\frac{\pi}{6}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$
$$A_2=\pi r s=\pi\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\pi\sqrt{2},\qquad A=A_1+A_2=\frac{\pi}{6}\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1\right).$$

3 Vi skal vise formelen

$$P_n:\qquad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\qquad \text{for } n=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

ved induksjon. For $n=1$ er formelen riktig siden $1^3=[(1\cdot 2)/2]^2$. Vi antar så at P_n er riktig for $n=k$, $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$. Vi må vise at den da også er riktig for $n=k+1$, dvs. at da er $1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$:

$$1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3=\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3\right)+(k+1)^3$$
$$\overset{P_k}{=}\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{2^2}+(k+1)\right]$$
$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Ved induksjon følger at formelen P_n er riktig for alle positive hele tall.

4 Volumet av ballongen er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, og overflatearealet er $A = 4\pi r^2$. Volumets vekstrate, i cm^3/s, er $1000 = dV/dt = 4\pi r^2 dr/dt$. Da får vi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4\pi r^2} \qquad \text{og følgelig} \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{1000}{4\pi r^2} = \frac{2000}{r}.$$

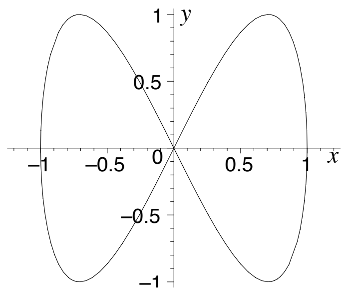
Når $r = 25$ cm, er altså $dA/dt = 2000/25 = 80$ (cm^2/s).

5 Vi kan skissere kurven ved å regne ut $x = \sin t$, $y = \sin 2t$ og $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = 2\cos 2t/\cos t$ for forskjellige verdier av t, eller vi kan finne en ligning for kurven ved å eliminere parameteren t:

$$y = \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 t}\right) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Kurven er symmetrisk om x-aksen og y-aksen, så vi trenger bare punkter i første kvadrant.

t	x	y	dy/dx
0	0	0	2
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	1	0
$\pi/2$	1	0	∞



Fra tabellen med x, y og dy/dx ser vi at tangenten $y - y_0 = k(x - x_0)$ i punktene med parameterverdier $t = 0$ og $t = \pi/4$ blir

$$t = 0: \quad y = 2x, \qquad t = \pi/4: \quad y = 1.$$

For arealet A av området begrenset av kurven får vi

$$A = 4\int_0^1 y\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,(\cos t\,dt) = 4\int_0^{\pi/2} 2\sin t\cos^2 t\,dt = 4\Big[-\frac{2}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}.$$

6 Vi har $t = 0$ når det begynner å snø med konstant rate r. Ved tiden t er snødybden da $h = rt$. La plogens bredde være b. Hvis $x = x(t)$ er vegstrekningen som plogen har kjørt, og $V = V(t)$ er bortryddet snømengde, har vi

$$\frac{dV}{dt} = b \cdot rt \cdot \frac{dx}{dt}\,.$$

Vi har gitt at plogen rydder snø med konstant rate, $dV/dt = a$, og får

$$t\frac{dx}{dt} = k \qquad (\text{der } k = a/br).$$

Differensialligningen kan skrives $dx/dt = k/t$ og har generell løsning $x(t) = k\ln t + C$. Vi setter $t = t_0$ når plogen begynner å kjøre kl. 0600, og bestemmer t_0 ved å sette inn de gitte opplysningene.

$$\begin{array}{llrl}
\text{(kl. 0600)} & x(t_0) = 0\ : & 0 = k\ln t_0 + C & (1)\\
\text{(kl. 0700)} & x(t_0+1) = 5\ : & 5 = k\ln(t_0+1) + C & (2)\\
\text{(kl. 0900)} & x(t_0+3) = 10 : & 10 = k\ln(t_0+3) + C & (3)
\end{array}$$

Av ligning (1) får vi $C = -k \ln t_0$ som innsatt i (2) og (3) gir

$$5 = k \ln(t_0 + 1) - k \ln t_0 = k \ln \frac{t_0 + 1}{t_0}$$
$$10 = k \ln(t_0 + 3) - k \ln t_0 = k \ln \frac{t_0 + 3}{t_0}.$$

Herav følger

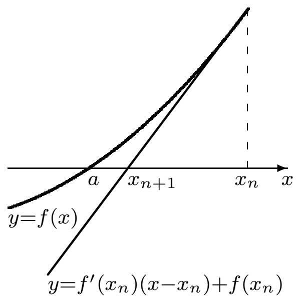
$$\ln \frac{t_0 + 3}{t_0} = 2 \ln \frac{t_0 + 1}{t_0} = \ln \left(\frac{t_0 + 1}{t_0} \right)^2.$$

Dermed er $t_0(t_0 + 3) = (t_0 + 1)^2$ og følgelig $t_0 = 1$. Plogen startet altså $t_0 = 1$ time etter at det begynte å snø, det betyr at snøfallet startet kl. 0500.

$\boxed{7}$ **a)** Siden $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 5 > 0$ og f er deriverbar og følgelig kontinuerlig, har f minst ett nullpunkt $a \in (1, 2)$ ifølge skjæringssetningen.

Siden $f'(x) > 0$ er f strengt voksende på intervallet $[1, 2]$, og a er dermed det eneste nullpunktet for f i dette intervallet.

b) La $\{x_n\}$ være følgen av tilnærmingsverdier til a som vi får ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 2$.
Grafen til f er voksende på $[1, 2]$ (fordi $f'(x) > 0$), og den blir brattere og brattere (med brattere tangent) jo større x er (fordi $f''(x) > 0$). Derfor ser grafen ut som på figuren, og tangenten i et punkt $(x_n, f(x_n))$ der $x_n > a$ må skjære x-aksen i et punkt mellom a og x_n. Det vil si



$$(*) \qquad a < x_{n+1} < x_n \qquad \text{for } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Av $(*)$ får vi at følgen $\{x_n\}$ er avtagende og nedtil begrenset, og dermed konvergent, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Følgen er gitt ved $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Ved å ta grenseverdien på begge sider får vi $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - f(\lim_{n\to\infty} x_n)/f'(\lim_{n\to\infty} x_n)$ siden f og f' er kontinuerlige. $L = L - f(L)/f'(L)$ medfører $f(L) = 0$, og grenseverdien L er altså nullpunkt for f i intervallet $(1, 2)$. Men f har bare ett nullpunkt, a, i dette intervallet. Ergo er $L = a$ og $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\boxed{8}$ **a)** Vi skal bruke Simpsons metode med 4 delintervaller. Da er $\Delta t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}/8$, og vi får følgende tabell med $t_i = i\Delta t$ og $y_i = \sin\left(t_i^2\right)$ for $i = 0,\ 1,\ \ldots 4$:

t_i	0	$\sqrt{\pi}/8$	$2\sqrt{\pi}/8$	$3\sqrt{\pi}/8$	$\sqrt{\pi}/2$
y_i	0	0.04907	0.19509	0.42756	0.70711

Da får vi, når vi avrunder sluttsvaret til 4 desimaler,

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin\left(t^2\right) dt \approx S_4 = \frac{\Delta t}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) = 0.2218.$$

b) For $f(x) = \sin x$ er Taylorpolynomet P_3 gitt ved $P_3(x) = x - x^3/6$. Bruker vi $P_3(x)$ som tilnærming til $f(x)$ får vi, med $x = t^2$, $\sin(t^2) \approx t^2 - t^6/6$. Det gir

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin\left(t^2\right) dt \approx \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \left(t^2 - \tfrac{1}{6}t^6\right) dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{42}t^7\right]_0^{\sqrt{\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{42}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{7/2} = 0.2218$$

der sluttsvaret igjen er avrundet til 4 desimaler.

SIF5003 Matematikk 1, 6. desember 2000

Løsningsforslag

Oppgave 1

Dreid om y–aksen: (iv). Dreid om $x = -1$: (iii).

Oppgave 2

Om bredden på rektanglet er $2x$ og høyden er y finner vi for det ukjente arealet A og den kjente omkretsen 10:

$$\begin{aligned} A &= 2xy + \tfrac{1}{2}\pi x^2, \\ 10 &= (2+\pi)x + 2y. \end{aligned}$$

Den siste ligningen gir $y = 5 - (1 + \pi/2)x$, så

$$A = 10x - (2+\pi)x^2 + \tfrac{1}{2}\pi x^2 = 10x - (2 + \tfrac{1}{2}\pi)x^2.$$

Her kan x variere fra 0 til den verdien som gir $y = 0$, altså $0 \le x \le 10/(2+\pi)$. Vi ser etter et maksimum i det indre av dette intervallet:

$$\frac{dA}{dx} = 10 - (4+\pi)x = 0 \text{ når } x = \frac{10}{4+\pi}.$$

Denne verdien ligger i det indre av intervallet, og siden $A(x)$ er et annengradspolynom med negativ ledende koeffisient trenger vi ikke en gang sjekke endepunktene. Den tilsvarende verdien for y er

$$y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 5 - \frac{10+5\pi}{4+\pi} = \frac{10}{4+\pi}.$$

Det optimale rektanglet er altså $\dfrac{20}{4+\pi}$ m bredt og $\dfrac{10}{4+\pi}$ m høyt.

Oppgave 3

a Vi prøver oss med forholdskriteriet:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)4^{n+1}}}{\dfrac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{|x|}{4} = \frac{|x|}{4}$$

så rekken konvergerer når $|x| < 4$ og divergerer når $|x| > 4$, og konvergensradien blir $R = 4$. For $x = \pm 4$ er

$$\left|\frac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}\right| = \frac{16}{n(n+2)} < \frac{16}{n^2},$$

så rekken er absolutt konvergent ved sammenligning med den konvergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 16/n^2$.

b Leddvis derivasjon (som er tillatt i det indre av konvergensintervallet, altså for $|x| < 4$) gir

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n4^n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n = -x\ln\Big(1-\frac{x}{4}\Big)$$

hvor den siste likheten fremkommer ved å bytte ut x med $-x/4$ i den kjente rekken

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

eller ved å derivere en gang til, som gir en geometrisk rekke med kjent sum, og så integrere tilbake.

Oppgave 4

Erstatter vi x med t^4 i den oppgitte formelen får vi

$$\sqrt{1+t^4} = 1 + \frac{t^4}{2} - \frac{1}{8}\frac{t^8}{(1+z)^{3/2}}, \qquad 0 < z < t^4.$$

Så lenge $0 < t < 1$ er da også $0 < z < 1$, slik at $1 < (1+z)^{3/2} < 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$. Dermed er (vi må snu ulikhetene en gang når vi inverterer, og en gang til fordi vi trekker fra):

$$1 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^8}{8} < \sqrt{1+t^4} < 1 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^8}{16\sqrt{2}}.$$

Vi vil integrere denne ulikheten over $[0,1]$. Vi har

$$\int_0^1 \Big(1 + \frac{t^4}{2}\Big)\,dt = \Big[t + \frac{t^5}{10}\Big]_0^1 = 1{,}1, \qquad \int_0^1 t^8\,dt = \frac{1}{9}$$

slik at

$$1{,}1 - \frac{1}{9\cdot 8} < \int_0^1 \sqrt{1+t^4}\,dt < 1{,}1 - \frac{1}{9\cdot 16\sqrt{2}}$$

som praktisk talt er hva vi skulle vise.

Oppgave 5

Kall de tre funksjonene i grafene A, B og C. Om vi setter $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ skal vi identifisere F, F' og F'' blant A, B og C. Her finnes nær sagt utallige muligheter for å eliminere mulighetene slik at bare en gjenstår. For eksempel kan vi merke oss at:

- $A' \neq B$ fordi $A'(x) > 0$ når $x < 0$,
- $B' \neq C$ fordi $B'(0) > 0$,
- $C' \neq A$ og $C' \neq B$ fordi $C'(0) < 0$.

Eneste gjenstående muligheter er $A' = C$, $B' = A$, slik at $B = F$, $A = B' = f$, $C = A' = f'$.

Sagt med andre ord: A) er (i); B) er (iii); C) er (ii).

Vi finner

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = F(1) - F(-1) = B(1) - B(-1) = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 6

Om vi kaller musepopulasjonen $P(t)$ finner vi

$$P' = k\big(1 - \cos(2\pi t)\big)P.$$

Dette er en separabel differensialligning med konstant løsning $P = 0$, som vi løser slik:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= k \int \big(1 - \cos(2\pi t)\big)\,dt; \\ \ln P &= k\Big(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big) + C_1; \\ P &= C \exp\bigg(k\Big(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big)\bigg). \end{aligned}$$

Dataene vi har fått oppgitt gir $P(0) = 10$ og $P(1) = 20$, som innsatt gir $C = 10$, $Ce^k = 20$. Så vi har $k = \ln 2$, og derfor

$$P(t) = 10 \exp\bigg(\Big(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big)\ln 2\bigg) = 10 \cdot 2^{t - \sin(2\pi t)/(2\pi)}.$$

Oppgave 007

Fra figuren (kameraet i K, agenten i B) finner vi

$$x = 10 \tan\theta$$

som ved derivasjon med hensyn på tiden t gir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

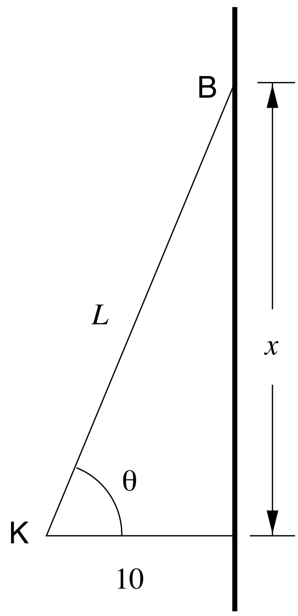
Men figuren gir også

$$\cos\theta = \frac{10}{L},$$

og kombinerer vi disse resultatene får vi

$$\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \frac{\cos^2\theta}{10}\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{10}{L^2}\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{10}{30^2}0{,}9 = 0{,}01$$

som er et mål på hvor fort kameraet dreier, i radianer per sekund.



(Det er flere andre relasjoner som kan leses ut av figuren og eventuelt deriveres, slik at oppgaven kan løses på mange måter. Den ovenstående er den korteste av alle løsningene vi har funnet så langt.)

Oppgave 8

Det er antagelig greiest i begge tilfellene å bare regne ut arealet av den høyre halvdelen av kurven og så gange med to.

For den første kurven er høyre halvdel gitt ved $0 \le t \le \pi$, og arealet er gitt ved:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\int_{t=0}^{\pi} y\,dx = 2\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin(2t)\cos t\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \sin t\cos^2 t\,dt = 2\big[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_0^{\pi} = \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

For den andre kurven er gyldige verdier av θ gitt ved $r^2 \ge 0$, altså $\cos(2\theta) \ge 0$. Det gir oss

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \le \theta \le \frac{\pi}{4} + k\pi$$

for et heltall k. For hver lovlig θ har vi to mulige valg: $r = \pm\sqrt{\cos(2\theta)}$. Å velge minustegnet er jevngodt med å legge π til θ og velge plusstegnet, så vi finner at høyre halvdel gitt ved

$$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad r \ge 0,$$

og arealet blir

$$A_2 = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta = \big[\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Siden $4/3 > 1$ må den første kurven være den ytterste.

Oppgave 9

For å finne Taylorpolynomet til annen grad i $x = 1$ trenger vi å finne $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$.

Setter vi inn $x = 1$ i den gitte ligningen finner vi $ye^y = 0$, så $y = 0$, og derfor er $f(1) = 0$.

Deriverer vi den gitte ligningen med hensyn på x får vi

$$2x + (1+y)e^y y' = 0. \tag{1}$$

Setter vi så inn $x = 1$ og $y = 0$ her, får vi $2 + y' = 0$, slik at $f'(1) = -2$.

Til sist deriverer vi (1) med hensyn på x og finner

$$2 + (2+y)e^y(y')^2 + (1+y)e^y y'' = 0.$$

Her kan vi sette inn $x = 1$, $y = 0$ og $y' = -2$ som gir $2 + 2(-2)^2 + y'' = 0$, slik at $f''(1) = -10$.

Taylorpolynomet av annen grad er derfor

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = -2(x-1) - 5(x-1)^2.$$

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I SIF5003 MATEMATIKK 1
31 juli 2001

Oppgave 1. Akselerasjonen er

$$a(t) = v'(t) = 0.0012\,t^2 - 0.06\,t + 8.$$

Vi søker maksimum og minimum på intervallet $[0, 120]$.

$$a'(t) = 0.0024\,t - 0.06 = 0 \quad \text{for } \ t = 0.06/0.0024 = 25.$$

Videre er $a'(t) < 0$ for $t < 25$ og $a'(t) > 0$ for $t > 25$. $a(t)$ har derfor minimum for $t = 25$ og maksimum i et endepunkt for intervallet. Siden $a(0) = 8$ og $a(120) = 18.08$, er maksimal akselerasjon $a(120) = 18.08$ m/s^2. Minimal akselerasjon er $a(25) = 7.25\,\mathrm{m/s}^2$.

Oppgave 2.

$$(i) \qquad V = \int_*^{**} \pi\, x^2\, dy = \int_0^1 \pi\, t^6 \cdot 2t\, dt = \left[2\pi \frac{t^8}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(ii) \qquad V = \int_*^{**} (2-y)\cdot 2\pi\, x\, dx = \int_0^1 (2-t^2-1) 2\pi\, t^3 3t^2 dt = 6\pi \int_0^1 (t^5 - t^7) dt = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 3

a) Trapesmetoden med fire delintervaller gir

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\, dx \approx T_4 &= \frac{3-1}{4} \cdot \frac{1}{2}\{f(1) + 2f(3/2) + 2f(2) + 2f(5/2) + f(3)\} \\ &= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 + 3\right) = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Videre gjelder

$$\left|\int_1^3 f(x)\, dx - T_4\right| \leq \frac{5 \cdot (3-1)^3}{12 \cdot 4^2} = \frac{5}{24} \approx 0.2.$$

b) La $F(x) = [f(x)]^2$. Med n delintervaller, er feilen begrenset av $M \cdot (3-1)^3/(12 \cdot n^2)$, der M er en positiv konstant slik at $|F''(x)| \leq M$ for $1 \leq x \leq 3$. Vi har $F'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ og $F''(x) = 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x)$. Det vil si at $|F''(x)| \leq 2|f'(x)|^2 + 2|f(x)f''(x)| \leq 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 62$. Vi kan derfor bruke $M = 62$.

Feilen er høyst 10^{-4} når

$$\frac{62 \cdot 2^3}{12 \cdot n^2} \leq 10^{-4}, \quad \text{det vil si,} \quad n^2 \geq \frac{62 \cdot 8}{12} \cdot 10^4$$

som holder for $n \geq 643$.

Oppgave 4 La T_S være Dollys temperatur, og la $T(t)$ være termometerets temperatur ved tidspunkt t. Da gjelder

$$T'(t) = k(T_S - T(t))$$

der k er en positiv proporsjonalitetskonstant. Vi løser den separable differensialligningen:

$$\int \frac{dT}{T_S - T} = k \int dt$$
$$-\ln|T_S - T| = kt + C_1$$
$$T_S - T(t) = Ce^{-kt}$$

der C er en vilkårlig reell konstant. Vi har videre

$$\begin{aligned}
T(0) &= 15 \quad \Rightarrow \quad T_S - 15 = C \quad \Rightarrow \quad T_S - T(t) = (T_S - 15)e^{-kt} \\
T(10) &= 25 \quad \Rightarrow \quad T_S - 25 = (T_S - 15)e^{-10k} \quad \Rightarrow \quad e^{-10k} = \frac{T_S - 25}{T_S - 15} \\
T(20) &= 31 \quad \Rightarrow \quad T_S - 31 = (T_S - 15)e^{-20k} = (T_S - 15) \cdot \left(\frac{T_S - 25}{T_S - 15}\right)^2
\end{aligned}$$

som er en ligning for T_S. Ligningen kan skrives

$$T_S^2 - 46T_S + 465 = T_S^2 - 50T_S + 625$$

og har løsning $T_S = 40$.

Oppgave 5

(i) Forholdstesten viser at rekken konvergerer absolutt siden

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n} e^{-(n+1)^2+n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-2n-1} \to 1 \cdot 0 = 0$$

når $n \to \infty$.

(ii) Rekken er alternerende, men alternerende rekketesten kan ikke brukes her fordi leddene ikke avtar monotont mot 0.

På den annen side er $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ en konvergent rekke ved alternerende rekketesten, mens $\sum 1/n$ er den harmoniske rekken som divergerer. Altså kan ikke rekken konvergere. Konklusjon: rekken divergerer.

Oppgave 6 Radien i bøtten ved høyde $y = h$ er $x = h/3 + 10$. Når vannet når h cm opp i bøtten, er vannmengden i bøtten

$$V(h) = \frac{\pi h}{3}(10^2 + 10 \cdot (h/3 + 10) + (h/3 + 10)^2) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^3}{9} + 10h^2 + 300h\right)$$

ifølge formelen for volumet av en avkortet kjegle (Rottman side 34). Vi søker dh/dt når $dV/dt = 1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Kjerneregelen gir

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\frac{dV}{dh}} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}(\frac{h^2}{3} + 20h + 300)}$$

For $h = 10$ gir dette

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi} \cdot \frac{1}{100 + 600 + 900} = \frac{9}{1600\pi}.$$

Oppgave 7 Det lukkede integrasjonsintervallet ligger innenfor det åpne konvergensintervallet for rekken

$$\frac{1}{1 + x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \quad \text{for } |x^4| < 1.$$

Vi kan derfor integrere rekken leddvis. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^4}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} (-1)^n x^{4n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{4n+1}}{4n + 1}.$$

Dette er en alternerende rekke med monotont avtagende ledd. Siden $(1/2)^{13}/13 \approx 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$, holder det å ta med tre ledd av rekken. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^4}\, dx \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^9}{9} \approx 0.4940.$$

Oppgave 8 Lengden av grafen er

$$L = \int_*^{**} ds = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

der $f'(x) = \sqrt{(x^3 + 2)^2 - 1}$ ved fundamentalteoremet for integralregningen. Det gir

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (x^3 + 2)^2 - 1}\, dx = \int_0^2 |x^3 + 2|\, dx = \int_0^2 (x^3 + 2)\, dx = 8.$$

Oppgave 9

(i) Ved L'Hôpitals regel gjelder

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) + xf'(x)}{1}$$

der $f(x)$ går mot 1 og $f'(x) = \sqrt{xf(x) - 1}$ går mot 0. Altså er

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} = 1.$$

(ii) Også her kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - 1}{(x - 1)^{3/2}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{\frac{3}{2}(x - 1)^{1/2}}$$

der $f'(x) = \sqrt{xf(x) - 1}$. Altså har vi

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - 1}{(x - 1)^{3/2}} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{\sqrt{x - 1}} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{xf(x) - 1}{x - 1}} = \frac{2}{3}$$

der vi har brukt resultatet fra (i).

SIF5003 Matematikk 1, 5. desember 2001

Løsningsforslag

Oppgave 1

For den første grensen får vi et ∞/∞-uttrykk, og bruker L'Hôpitals regel (markert ved $\stackrel{*}{=}$) :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

For den andre får vi et $\infty \cdot 0$-uttrykk som vi gjør om til et $0/0$-uttrykk. Substitusjonen $u = 1/x$ før vi bruker L'Hôpital sparer bare litt arbeid:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3} - 1}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{(1+u)^{1/3} - 1}{u} \stackrel{*}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}(1+u)^{-2/3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Oppgave 2

Kaller vi vinkelen i figuren α, vil trapeset få høyde $\sin\alpha$. Den øvre siden får lengde $2\cos\alpha$, og den nedre har lengde 2, så arealet er

$$A(\alpha) = \sin\alpha(1+\cos\alpha), \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

For å finne det største arealet deriverer vi:

$$\frac{dA}{d\alpha} = \cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$$

hvor vi brukte $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Dette gir

$$\frac{dA}{d\alpha} = 0 \iff 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \iff \cos\alpha = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{1+8}) \iff \cos\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Eneste kritiske punkt i $(0, \pi/2)$ er der hvor $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, eller $\alpha = \pi/3$. For å finne maksimum av funksjonen A over $[0, \pi/2]$ må vi sjekke dette punktet og endepunktene. Men $A(0) = 0$, $A(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, og $A(\pi/2) = 1$. Av disse er $A(\pi/3)$ størst.

Vi ender med tre ekvivalente beskrivelser for det maksimale trapeset: $\alpha = \pi/3$; øvre side er halvparten så lang som nedre side; høyden er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Arealet blir $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Oppgave 3

Integralregningens fundamentalsetning gir oss

$$f'(x) = \sqrt{x^2 e^{2x^2} - 1}.$$

Buelengden blir dermed (bruk substitusjonen $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ i det siste integralet)

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x^2 e^{2x^2}}\,dx = \int_1^2 x e^{x^2}\,dx = \Big[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\Big]_1^2 = \tfrac{1}{2}(e^4 - e).$$

Oppgave 4

a Divergensen av den første rekken vises ved integraltesten, der vi benytter den avtagende funksjonen $f(x) = 1/(x\sqrt{\ln x})$:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{b\to\infty} \Big[2\sqrt{u}\Big]_{\ln 2}^b = \infty.$$

Den andre rekken konvergerer ved testen for alternerende rekker, siden fortegnene alternerer, absoluttverdien av n-te ledd avtar med n (fordi nevneren vokser), og n-te ledd går mot 0 når $n \to \infty$.

Den konvergerer ikke absolutt. Dette kan vises ved grensesammenligning med den første rekken, fordi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+\sqrt{n})\sqrt{\ln n}}}{\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Altså er den andre rekken betinget konvergent.

b Vi kan bruke forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+3}{(n+1)!} x^{2n+2}}{\dfrac{2n+1}{n!} x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)} x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{\Big(2 + \dfrac{1}{n}\Big)(n+1)} x^2 = 0 < 1$$

for alle x, så rekken er (absolutt) konvergent for alle x.

Rekkens sum for $x = 1$ kan finnes på en av (minst) to måter. Den *første* metoden er å sette inn $x = 1$ og dele rekken i to:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{2n+1}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$$

Den siste summen kjenner vi igjen; den har sum e (den er Taylorrekken for e^x med $x = 1$). Den første summen kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2e.$$

Altså er den søkte summen lik $2e + e = 3e$.

Den *andre* metoden går ut på å først finne summen for *alle* x. Vi bruker at potensrekker kan deriveres leddvis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = \frac{d}{dx}\Big(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\Big) = \frac{d}{dx}(xe^{x^2}) = (2x^2+1)e^{x^2},$$

hvor vi så setter inn $x = 1$ og får summen lik $3e$ som før.

Oppgave 5

a En rimelig tolkning av opplysningen om halveringstiden må være $M(7) \approx \frac{1}{2}M(0)$, det vil si $e^{-7k} \approx \frac{1}{2}$. Det gir $k \approx (\ln 2)/7 \approx 0{,}099$.

Vi presenterer her to måter å vise den gitte formelen på. For enkelhets skyld innfører vi $\gamma = e^{-0{,}1}$. Etter ett døgn uten tilførsel av thyroxin har altså stoffmengden i kroppen sunket til γ ganger den opprinnelige verdien.

Den *første* metoden er å se at, om thyroxinmengden i kroppen er M_n etter dagens dose på dag n, etter den γM_n like før dagens dose neste dag. Så gir vi en dose på 0,1, og får dermed

$$(*) \qquad M_{n+1} = 0{,}1 + \gamma M_n.$$

Den oppgitte formelen gir $M_1 = 0{,}1$, som er rimelig dersom pasienten ikke hadde noe thyroxin i kroppen før behandlingen startet på dag 1.

Anta nå at den oppgitte formelen er riktig for $n = k$, det vil si at

$$M_k = 0{,}1\frac{1-\gamma^k}{1-\gamma}.$$

Anvender vi $(*)$ får vi da

$$M_{k+1} = 0{,}1 + \gamma M_k = 0{,}1 + 0{,}1\,\gamma\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma} = 0{,}1\frac{1-\gamma+\gamma(1-\gamma^n)}{1-\gamma} = 0{,}1\frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma}$$

som er den oppgitte formelen for $n = k+1$. Den oppgitte formelen følger derfor ved induksjon.

Den *andre* metoden går ut på å legge merke til at etter dagens dose på dag n skriver thyroxinmengden i kroppen seg fra n forskjellige doser: Hele dagens dose (0,1), det som er igjen av gårsdagens dose ($0{,}1\,\gamma$), og så videre. Det som er igjen fra dosen gitt for j dager siden er $0{,}1\,\gamma^j$, og dermed blir

$$M_n = \sum_{j=0}^{n-1} 0{,}1\,\gamma^j = 0{,}1\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma}$$

ved den vanlige formelen for en endelig sum av en geometrisk rekke.

b Siden $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ blir

$$\lim_{n\to\infty} 0{,}1\frac{1-e^{-0{,}1\,n}}{1-e^{-0{,}1}} = \frac{0{,}1}{1-e^{-0{,}1}}.$$

Denne verdien kaller vi altså M_*. Vi finner

$$M_n > 0{,}95\,M_* \iff 1 - e^{-0{,}1\,n} > 0{,}95 \iff e^{-0{,}1\,n} < 0{,}05$$
$$\iff e^{0{,}1\,n} > 20 \iff n > 10\ln 20 \approx 29{,}96.$$

Først på dag 30, altså 29 dager etter at behandlingen startet, vil altså medisinmengden overstige 95% av grenseverdien.

Oppgave 6

a Ligningen er separabel, og standard løsningsmetode gir

$$\int \frac{1+y}{y}\,dy = -\int dt.$$

Integrasjon av dette gir umiddelbart

$$y + \ln y = C - t$$

som påstått i oppgaven. (Ligningen har også den konstante løsningen $y = 0$, men den interesserer oss ikke siden $y > 0$ var gitt.)

Initialbetingelsen $y(0) = 1$ kan settes inn i løsningen ($y = 1$, $t = 0$) og gir oss $1 = C - 0$, så $C = 1$, og vi har derfor

$$(*) \qquad y + \ln y = 1 - t.$$

Setter vi så inn $y = 0{,}3$ får vi

$$t = 1 - 0{,}3 - \ln 0{,}3 \approx 1{,}9040.$$

b Å bestemme $y(2)$ er det samme som å løse $(*)$ med hensyn på y der $t = 2$. Vi skal altså finne et nullpunkt for funksjonen

$$f(y) = 1 + y + \ln y.$$

Newton-iterasjon for ligningen $f(y) = 0$ er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = y_n - \frac{1 + y_n + \ln y_n}{1 + \dfrac{1}{y_n}} = -\frac{y_n \ln y_n}{y_n + 1}.$$

En iterasjon med startverdien $y_0 = 0{,}3$ gir oss

$$y_1 = -\frac{0{,}3 \ln 0{,}3}{1{,}3} \approx 0{,}2778.$$

Oppgave 7

Figuren viser at konkoiden skjærer seg selv i origo, altså der $r = 0$. Setter vi $r = 0$ og løser, får vi $\sin\theta = \frac{1}{2}$, som har to løsninger med $0 < \theta < \pi$, nemlig $\theta = \frac{1}{6}\pi$ og $\theta = \frac{5}{6}\pi$. (For θ utenfor $[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi]$ blir $r < 0$. Disse θ-verdiene gir de to ubegrensede kurvedelene på undersiden av x-aksen.) Utregningen blir litt enklere om vi utnytter symmetrien: $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ gir at kurven er symmetrisk om y-aksen. Vi kan nøye oss med å regne ut arealet av den høyre halvdelen og gange med 2. Arealet blir da

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Bigl(2 - \frac{1}{\sin\theta}\Bigr)^2\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Bigl(4 - \frac{4}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\Bigr)\,d\theta.$$

Det ubestemte integralet av den første og siste termen kan vel regnes som kjent, mens den midterste kan integreres slik (med substitusjonen $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\,d\theta$):

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\int \Bigl(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Bigr)\,du = \frac{1}{2}\ln\Bigl|\frac{u-1}{u+1}\Bigr| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}A &= \Bigl[4\theta - 2\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \cot\theta\Bigr]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi + 2\ln\frac{1-\cos\frac{1}{6}\pi}{1+\cos\frac{1}{6}\pi} + \cot(\tfrac{1}{6}\pi) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} + 4\ln\bigl(2-\sqrt{3}\bigr) = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} - 4\ln\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)\end{aligned}$$

(Det er mange måter å uttrykke svaret på.)

Hadde vi slått opp i Rottmann ville vi ha funnet

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\tan\frac{\theta}{2} + C$$

som ville gitt

$$A = \Bigl[4\theta - 4\ln\tan\frac{\theta}{2} - \cot x\Bigr]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi + 4\ln\tan\tfrac{1}{12}\pi + \sqrt{3}.$$

Fra den trigonometriske identiteten

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

får vi $\tan\frac{1}{12}\pi = 2 - \sqrt{3}$.

(Men til eksamen gir vi full score uten noen av disse siste forenklingene.)

Oppgavesettet har 10 punkter, som teller likt ved bedømmelsen.

1 For $n \geq 1$ er $n^{3/2} + 1 > n^{3/2}$ og derfor $1/(n^{3/2}+1) < 1/n^{3/2}$. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$ er en konvergent rekke (p-rekke med $p = \frac{3}{2} > 1$), og den opprinnelige rekken er derfor konvergent ved sammenligningstesten. [Grensesammenligningstesten kunne også vært brukt.]

2 For $n = 1$ har produktet på venstresiden bare ett ledd, og den søkte ulikheten blir $2 \geq 2$, som åpenbart er riktig.

Anta at ulikheten holder for $n = k \geq 1$. Vi starter med venstresiden når $n = k + 1$:

$$\underbrace{\Big(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)}_{\geq k+1}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) \geq (k+1)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big)$$
$$= k + 1 + \sqrt{k+1} > k + 2,$$

fordi $\sqrt{k+1} > 1$. Ulikheten holder altså også for $n = k + 1$, og den holder derfor for alle heltall $n \geq 1$. [I tillegg har vi vist at ulikheten holder strengt for $n > 1$.]

3 Hvis rakettens høyde (målt i meter) er $h = h(t)$, er $\tan \alpha = h/100$. Derivasjon gir

$$\frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha} = \frac{h'}{100},$$

når α måles i radianer. Vi setter inn $\alpha = 45°$, som gir $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Videre blir $\alpha' = 5°/\mathrm{s} = \frac{5}{180}\pi$ rad/s, så vi ender med $h' = \frac{100}{1/2} \cdot \frac{5}{180}\pi = \frac{50}{9}\pi \approx 17{,}45$ meter per sekund.

4 På grunn av symmetrien vil rektanglet med maksimalt areal ha alle sine hjørner på superellipsen. Om vi lar (x, y) betegne hjørnet i første kvadrant, blir de andre hjørnene $(\pm x, \pm y)$ og rektanglets areal blir $4xy$.

Oppgaven går altså ut på å finne den maksimale verdien til $4xy$ når $x \geq 0$, $y \geq 0$ og den gitte ligningen holder. Vi kan løse ligningen med hensyn på y:

$$y = 3\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4}$$

så oppgaven er å finne den maksimale verdien til

$$f(x) = 12x\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4}, \qquad 0 \leq x \leq 5.$$

Funksjonen er positiv i det indre av intervallet $[0, 5]$ og null i endepunktene, og den er kontinuerlig i hele intervallet – så den må oppnå sitt maksimum i det indre av intervallet. Vi finner maksimumspunktet ved derivasjon:

$$f'(x) = 12\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4} - \frac{12}{5}x\Big(\frac{x}{5}\Big)^3\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{-3/4}$$
$$= 12\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{-3/4}\bigg(1 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4 - \Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)$$

så

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2^{1/4}}.$$

Dette gir da den maksimale verdien:

$$f\left(\frac{5}{2^{1/4}}\right) = 12 \cdot \frac{5}{2^{1/4}} \cdot \frac{1}{2^{1/4}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \approx 42{,}4.$$

Alternativ, superelegant løsning: Betrakt ulikheten

$$0 \le \left(\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^4 + \left(\frac{y}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{5}\right)^2\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{xy}{15}\right)^2$$

som gir oss

$$xy \le \frac{15}{\sqrt{2}}.$$

Men ulikheten blir en likhet når $x/5 = y/3$, og da har xy sin største verdi, $15/\sqrt{2}$. Arealet $4xy$ blir dermed maksimalt $60/\sqrt{2}$.

$\boxed{5}$ **a)** Oppdeling av intervallet $[0,1]$ i fire delintervall gir fem delepunkter inklusive endepunktene. Vi beregner integranden i disse punktene:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\cos(x_i^2)$	1,0000	0,9980	0,9689	0,8459	0,5403

Trapesmetoden gir oss tilnærmingen

$$T_4 = \frac{1}{2\cdot 4}\bigl(\cos(x_0^2) + 2\cos(x_1^2) + 2\cos(x_2^2) + 2\cos(x_3^2) + \cos(x_4^2)\bigr) \approx 0{,}8957.$$

For å estimere feilen trenger vi en øvre grense M_2 for $|f''(x)|$. To gangers derivasjon gir $f''(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$. For $0 \le x \le 1$ er $-6 \le f''(x) \le 0$ [fordi x^2, $\sin(x^2)$ og $\cos(x^2)$ alle ligger mellom 0 og 1], så $|f''(x)| \le 6$. Med $M_2 = 6$ blir feilestimatet

$$|E_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{6(1-0)^3}{12n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

For å garantere $|E_n| < 10^{-5}$ må vi ha $2n^2 > 10^5$, som gir $n > 100\sqrt{5} \approx 223{,}6$. Velger vi $n = 224$ skulle vi således være garantert tilstrekkelig nøyaktighet.

Vi kunne funnet en mindre verdi for M_2 ved faktisk å bestemme maksimumsverdien for $|f''(x)|$ over integrasjonsintervallet, men det er ikke mye å vinne på det. Vi klarer neppe å bestemme denne verdien analytisk, men en graf overbeviser i det minste om at vi kunne satt $M_2 = 4$, eller enda litt lavere. $M_2 = 4$ i regnestykket over ville gitt $n = 183$ delintervaller.

$M_2 = 4$ og $n = 4$ gir for øvrig $E_4 \le \frac{1}{48}$, så vi kunne godt nøyd oss med to desimaler i beregningen av T_4. Men oppgaven spurte ikke etter *dette* feilestimatet.

b) Vi finner Maclaurinrekken til $\cos(x^2)$ ved å bytte ut x med x^2 i Maclaurinrekken til $\cos x$:

$$\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x^2)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{4k}.$$

c) Maclaurinrekken vi fant over konvergerer for alle x. Vi kan derfor integrere leddvis:

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^1 x^{4k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}.$$

Dette er en alternerende rekke, og leddene avtar i absoluttverdi. Feilen har derfor samme fortegn som, og mindre absoluttverdi enn, det første utelatte leddet i en delsum. Vi stiller opp en tabell:

k	0	1	2	3
$\dfrac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}$	1,000	−0,100	0,0046	−0,0001

Et godt nok estimat for summen skulle dermed være summen av de første tre leddene, eller 0,9046. Dette estimatet er for stort, men ikke mer enn ca. 0,0001 for stort.

6 **a)** Vi finner volumet ved skivemetoden:

$$V = \int_1^4 \pi y^2\,dx = \pi \int_1^4 x^6\,dx = \frac{1}{7}\pi\bigl(4^7 - 1^7\bigr) = \frac{16\,383}{7}\pi \approx 7352{,}67.$$

b) Vi tar utgangspunkt i integralet $\int 2\pi y\,ds$. Her blir

$$ds = \sqrt{1 + \Bigl(\frac{dy}{dx}\Bigr)^2}\,dx = \sqrt{1 + \bigl(3x^2\bigr)^2}\,dx = \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

og dermed

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^4 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{2\pi}{36}\int_{10}^{2305} \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{2\pi}{36}\Bigl[\frac{2}{3}u^{2/3}\Bigr]_{10}^{2305} = \frac{\pi}{27}\bigl(2305^{3/2} - 10^{3/2}\bigr) \approx 12\,872{,}66. \end{aligned}$$

Her har vi brukt substitusjonen $u = 1 + 9x^4$, $du = 36x^3\,dx$.

7 Skriver vi om differensialligningen som $xy' = 4 - y^2$ blir det åpenbart at den er separabel. Innfører vi $y' = dy/dx$ og regner formelt videre får vi

$$\int \frac{dy}{4-y^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

For å integrere venstresiden må vi gjøre en delbrøksoppspaltning. Nevneren på venstresiden har faktoriseringen $4 - y^2 = (2-y)(2+y)$. Vi prøver oss med

$$\frac{1}{4-y^2} = \frac{A}{2+y} + \frac{B}{2-y}$$

som etter multiplikasjon med fellesnevneren $4 - y^2$ blir

$$1 = A(2-y) + B(2+y) = (B-A)y + 2(A+B).$$

Skal dette holde for alle y må $B - A = 0$ og $2(A+B) = 1$, altså $A = B = \frac{1}{4}$. Vi har altså

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{4-y^2} &= \frac{1}{4}\int \Bigl(\frac{1}{2+y} + \frac{1}{2-y}\Bigr)\,dy = \frac{1}{4}\bigl(\ln|2+y| - \ln|2-y|\bigr) + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\Bigl|\frac{2+y}{2-y}\Bigr| + C = \ln\Bigl|\frac{2+y}{2-y}\Bigr|^{1/4} + C. \end{aligned}$$

Alt i alt ender vi med (slår sammen to integrasjonskonstanter til en, og beholder navnet C for denne)

$$\ln\left|\frac{2+y}{2-y}\right|^{1/4} = \ln|x| + C,$$

og dermed

$$\left|\frac{2+y}{2-y}\right|^{1/4} = K_1|x|$$

der $K_1 = e^C$. Vi skriver dette som

$$\frac{2+y}{2-y} = Kx^4$$

med $K = \pm K_1^4$. Dette er et godt sted å bestemme K: Setter vi inn $x = 1$ og $y = 1$ får vi straks $K = 3$. Vi får altså $2 + y = 3x^4(2 - y)$, det vil si $(3x^4 + 1)y = 2(3x^4 - 1)$, og altså

$$y = 2\frac{3x^4 - 1}{3x^4 + 1}\,.$$

SIF5003 Matematikk 1, 4. desember 2002

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Utregning med skivemetoden gir

$$V = \int_0^h \pi x^2\,dy = \pi \int_0^h (4y)^{2/3}\,dy = \tfrac{3}{5}\cdot 4^{2/3}\pi h^{5/3} = \tfrac{6}{5}\cdot 2^{1/3}\pi h^{5/3}.$$

Alternativt kan sylinderskallmetoden brukes, med

$$V = \int_0^{(4h)^{1/3}} 2\pi x(h-y)\,dx = 2\pi \int_0^{(4h)^{1/3}} x\big(h - \tfrac{1}{4}x^3\big)\,dx$$

som leder til samme svar etter en litt mer infløkt utregning.

b Fra svaret i forrige punkt finner vi $dV/dh = 2\cdot 2^{1/3}\pi h^{2/3}$ (som vi også kan se direkte fordi tverrsnittsarealet av karet i høyde y er $\pi x^2 = \pi(4y)^{2/3} = 2\cdot 2^{1/3}\pi y^{2/3}$). For $h = 2$ blir da $dV/dh = 4\pi$, så vi finner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}, \quad \text{altså } 10 = 4\pi\frac{dh}{dt} \quad \text{hvorav } \frac{dh}{dt} = \frac{5}{2\pi} \quad (\text{dm/s}).$$

Oppgave 2

a Newtons avkjølings/-oppvarmingslov har formen

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(A - T)$$

der konstanten α uttrykker hvor lett varmen ledes inn i eller ut av melken.

Dette er en separabel differensialligning, og standardmetoden gir

$$\int \frac{dT}{A-T} = \alpha \int dt$$

(så lenge $A - T \neq 0$), altså $-\ln|A-T| = \alpha t + C$. Etter multiplikasjon med -1 anvender vi eksponensialfunksjonen og får $|A - T| = e^{-C}e^{-\alpha t}$, det vil si $T - A = \pm e^{-C}e^{-\alpha t}$, som vi endelig skriver $T = A + Be^{-\alpha t}$ der $B = \pm e^{-C}$.

De oppgitte dataene gir oss $T(0) = 6$ og $T(2) = 13$ der $A = 20$. Med andre ord,

$$20 + B = 6 \text{ og } 20 + Be^{-2\alpha} = 13.$$

Den første ligningen gir $B = -14$, og da vil den andre gi $-14e^{-2\alpha} = -7$, altså $\alpha = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

b Situasjonen i kjøleskapet er lik den på kjøkkenbenken (bortsett fra temperaturen), så vi må regne med samme verdi på α, mens vi nå har en ny og ukjent verdi for A (temperaturen i kjøleskapet). Vi har to opplysninger som gir $T(0) = 15$ og $T(1) = 12$. Ellers har løsningen samme form som før, så dette gir de to ligningene

$$A + B = 15 \text{ og } A + Be^{-\alpha} = 12.$$

Men nå er α kjent, og $e^{-\alpha} = 2^{-1/2} = 1/\sqrt{2}$. Den første av ligningene over gir $B = 15 - A$ som vi setter inn i den andre, og får $A + (15 - A)/\sqrt{2} = 12$. Dermed er

$$A = \frac{12 - 15/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 9 - 3\sqrt{2} \approx 4{,}8 \quad (^\circ\mathrm{C}).$$

Oppgave 3

a Den oppgitte rekken med $x = t^2$ kan skrives $\ln(1+t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^{2n}$ når $|t| < 1$. Siden integrasjonsintervallet $[0, \frac{1}{2}]$ ligger innenfor konvergensintervallet for rekken kan vi integrere leddvis, og få

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/2}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{n}\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{n(2n+1)}\Big]_{t=0}^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}n(2n+1)}.\end{aligned}$$

b Rekken er alternerende, absoluttverdien av leddene avtar med n og leddene går mot 0. Dermed er rekken ikke bare konvergent, men vi kan bruke feilestimatet for alternerende rekker, som sier at feilen i n-te delsum har mindre tallverdi (og samme fortegn som) første utelatte ledd. Vi må ha feil $< 10^{-3}$, som krever en nevner større enn 1000. Vi regner ut:

n	1	2	3
$n(2n+1)$	3	10	21
2^{2n+1}	8	32	128
$2^{2n+1}n(2n+1)$	24	320	2688

så vi trenger ikke mer enn to ledd i rekken for å finne summen med ønsket nøyaktighet. Vi har altså

$$\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{320} = \frac{37}{960} \approx 0{,}0385.$$

For å løse integralet eksakt, gjør vi en delvis integrasjon med

$$u = \ln(1+t^2), \quad dv = dt, \qquad du = \frac{2t}{1+t^2}\,dt, \quad v = t$$

og dermed

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt \\ &= \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{4} - \int_0^{1/2}\Big(2 - \frac{2}{1+t^2}\Big)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{4} - \Big[2t - 2\arctan t\Big]_0^{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{4} - 1 + 2\arctan\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Oppgave 4

Ringen som er antydet i figuren, med bredde dr, har cirka areal $2\pi r\,dr$ og dermed cirka masse lik $\rho(r)\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi r(r+1)^2\,dr$. Dermed er det bare å integrere opp for å finne massen:

$$m = \int_0^R 2\pi r(r+1)^2\,dr = 2\pi\int_0^R (r^3+2r^2+r)\,dr = \pi(\tfrac{1}{2}R^4 + \tfrac{4}{3}R^3 + R^2).$$

Oppgave 5

a Derivasjon gir $dy = \sinh ax\,dx$, så

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1+\sinh^2 ax)\,dx^2 = \cosh^2 ax\,dx^2.$$

Sidn $\cosh ax$ alltid er positiv, er $ds = \cosh ax\,dx$, og den søkte lengden er

$$L = \int_{-1}^{1} \cosh ax\,dx = \Big[\frac{\sinh ax}{a}\Big]_{-1}^{1} = 2\frac{\sinh a}{a}.$$

b Hyperbolsk tangens, tanh, er en voksende funksjon (dens deriverte er $1/\cosh^2 x$), så $x\tanh x$ er en voksende funksjon av x for $x > 0$. Ligningen $x\tanh x = 1$ kan derfor ikke ha mer enn én positiv løsning. På den annen side har den *minst* en løsning, for når $x \to \infty$ vil $\tanh x \to 1$, slik at $x\tanh x \to \infty$, og dermed vil spesielt $x\tanh x > 1$ når x er stor nok. Videre er $x\tanh x = 0$ når $x = 0$, så skjæringssetningen sier at $x\tanh x = 1$ for minst en x.

Setter vi $f(x) = x \tanh x - 1$ blir $f'(x) = \tanh x + x/\cosh^2 x$. Resultatet av Newtons metode kan tabuleres slik:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−0,2384058440	1,181568498	1,201770650
1	1,201770650	0,0025097380	1,199677041	1,199678639
2	1,199678639	−0,0000000015	1,199678640	1,199678640

Vi ser at allerede etter to iterasjoner er hele sju desimaler uforandret, og funksjonsverdien er også blitt svært liten – så burde trygt kunne stole på i hvert fall de fire desimalene oppgaven spurte etter, altså $x \approx 1{,}1997$ (med korrekt avrunding).

c Strekkraften er uttrykt ved $\sin\theta$, men derivasjon gir oss

$$\tan\theta = y'(1) = \sinh a.$$

Første utfordring blir altså å uttrykke $\sin\theta$ ved $\tan\theta$. Det er lettere å gjøre omvendt, og så løse ligningen:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}.$$

Multiplikasjon med kvadratroten og kvadrering gir $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta = \sin^2\theta$, og dermed

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\sinh^2 a}{1+\sinh^2 a} = \frac{\sinh^2 a}{\cosh^2 a} = \tanh^2 a.$$

Siden θ hører hjemme i første kvadrant blir $\sin\theta = \tanh a$. Tyngden av kabelen er proporsjonal med lengden L (kjent fra **a)**), så strekkraften i opphenget er proporsjonal med

$$F(a) = \frac{L}{2\sin\theta} = \frac{L}{2\tanh a} = \frac{\sinh a}{a\tanh a} = \frac{\cosh a}{a}.$$

For å finne når $F(a)$ er minimal deriverer vi og setter den deriverte lik null:

$$F'(a) = \frac{a\sinh a - \cosh a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a\sinh a - \cosh a = 0 \Leftrightarrow a\tanh a = 1.$$

Fra punkt **b)** vet vi at denne ligningen har presis én positiv løsning, $a \approx 1{,}1997$. Denne må gi minimalverdien, fordi $F(a) \to \infty$ dersom $a \to 0$ eller $a \to \infty$. Vertikalavstanden mellom endepunkt og midtpunkt blir $y(1) - y(0) = (\cosh a - 1)/a \approx 0{,}6753$ eller, med andre ord, omtrent 34 % av avstanden mellom opphengene.

SIF5003 Matematikk 1, 1. august 2003

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Vi finner

$$f'(x) = \sqrt{100-x} - \frac{x}{2\sqrt{100-x}} = \frac{100 - \frac{3}{2}x}{\sqrt{100-x}}$$

så eneste kritiske punkter i det indre av intervallet $(0, 100)$ er der hvor $f'(x) = 0$, altså $x = 200/3$. I endepunktene finner vi $f(0) = f(100) = 0$, så maksimum er

$$f\Big(\frac{200}{3}\Big) = \frac{2000}{3\sqrt{3}}.$$

b Julekurven blir en kjegle der sidekanten, fra kjeglespissen til randen, har lengde $R = 10\,\mathrm{cm}$. Om høyden er h og radien i grunnflaten er r blir $r^2 + h^2 = R^2$, så volumet er

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \tfrac{1}{3}\pi\, f(r^2).$$

Det maksimale volumet blir da

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi f\Big(\frac{200}{3}\Big) = \frac{2000}{9\sqrt{3}}\pi \approx 403\,\mathrm{cm}^3.$$

Målene på kurven blir

$$r = \sqrt{\tfrac{200}{3}} = 10\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\mathrm{cm} \quad \text{og} \quad h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{100 - \tfrac{200}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}.$$

Oppgave 2

a Det søkte arealet blir

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi e^{2\theta}\,d\theta = \tfrac{1}{4}\Big[e^{2\pi}\Big]_0^\pi = \tfrac{1}{4}(e^{2\pi} - 1).$$

For buelengden finner vi

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \left(\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\right)d\theta^2 = 2e^{2\theta}\,d\theta^2,$$

så (om vi bruker notasjonen fra neste punkt)

$$L_0 = \sqrt{2}\int_{-\pi}^0 e^\theta\,d\theta = \sqrt{2}(1 - e^{-\pi}).$$

b Samme utregning som over gir

$$L_k = \sqrt{2}\int_{-(k+1)\pi}^{k\pi} e^\theta \, d\theta = \sqrt{2}\Big[e^\theta\Big]_{-(k+1)\pi}^{k\pi} = \sqrt{2}(1-e^{-\pi})e^{-k\pi}.$$

Dermed får vi en geometrisk rekke:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k = \sqrt{2}(1-e^{-\pi})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi} = \sqrt{2}.$$

Oppgave 3

a Her får vi et 0/0-uttrykk, så vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{t\to 0}\frac{y-1}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2 e^{y^2}}{3t^2} = \frac{e^{f(0)^2}}{3} = \frac{e}{3}.$$

b Vi har:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(t) &= \frac{dy}{dt} = t^2\, e^{y^2} = t^2\, e^{f(t)^2}\\
&\quad \text{slik at } f'(0) = 0,\\
f''(t) &= (f'(t))' = 2te^{f(t)^2} + t^2 e^{f(t)^2}\cdot 2f(t)\cdot f'(t) = 2te^{f(t)^2}(1+tf(t)f'(t))\\
&\quad \text{slik at } f''(0) = 0,\\
f'''(t) &= (f''(t))' = 2e^{f(t)^2}(1+tf(t)f'(t)) + 2t\{\dots\}\\
&\quad \text{slik at } f'''(0) = 2e^0(1+0)+0 = 2e.
\end{aligned}$$

$P(t)$ er per definisjon Taylorpolynomet av 3. grad til f om $t = 0$. Det vil si

$$P(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 = 1 + \frac{e}{3}\,t^3.$$

Oppgave 4

a Vi har $f(0) = 0$ og $f'(x) = \cos x - 3x^2$, så $f'(0) = 1 > 0$. Dermed er f voksende for små x, og $f(a) > 0$ for en (liten) positiv a. Videre er $f(1) = \sin 1 - 1 < 0$. Ved skjæringssetningen har f minst ett nullpunkt mellom $a$og 1.

Videre er $f''(x) = -\sin x - 6x < 0$ for $x > 0$ (for $0 < x < \pi$ er $\sin x > 0$, og for $x > 1/6$ er $6x > 1 \geq -\sin x$). Så f er konkav for $x > 0$. f vokser til sitt maksimum for $x > 0$, og avtar deretter strengt, så det kan ikke finnes mer enn ett positivt nullpunkt.

b Vi deriverte f to ganger ovenfor. En gang til gir $f'''(x) = -\cos x - 6$. Vi finner

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \tfrac{7}{6}x^3.$$

Dersom vi antar at $P_3(x)$ er en god tilnærming til $f(x)$ nær nullpunktet til x, kan vi tilnærme nullpunktet til f ved å sette $P_3(x) = 0$, som gir $x = \sqrt{6/7} \approx 0{,}926$. (I virkeligheten ligger nullpunktet i nærheten av 0,92863.)

Oppgave 5

For rekken i (i) kan vi bruke integraltesten, siden funksjonen $f(x) = 1/(x \ln x)$ er positiv og avtagende for $x > 1$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \Big[\ln \ln x\Big]_2^\infty = \infty,$$

så rekken i (i) er *divergent*.

Rekken i (ii) er alterende, siden $\sin x > 0$ for $(n-1)\pi < x < n\pi$ når n er odde, $\sin x < 0$ når n er like.

Leddene a_n i rekken har også avtagende absoluttverdi, siden $\sin x$ er periodisk mens x øker.

Endelig er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, siden

$$|a_n| < \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{(n-1)} \to 0.$$

Ved testen for alternerende rekker er rekken i (ii) *konvergent*. (Den er faktisk betinget konvergent, siden $|a_n| > \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|/(n\pi)\,dx = 2/(n\pi)$.)

Oppgave 6

Trapesmetoden med fire delintervaller gir

$$I \approx T_4 = \frac{3-1}{2 \cdot 4}\big(f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + 2f(2) + 2f(\tfrac{5}{2}) + f(3)\big) \approx 1{,}882.$$

Her har vi regnet med tre desimaler (ikke helt urimelig når vi betrakter feilestimatet nedenfor med $n = 4$), og brukt verdiene

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	0,785	0,886	0,955	1,007	1,047

Feilestimatet for trapesmetoden på $[1, 3]$ med $M = \frac{1}{4}$ er

$$|I - T_n] \le \frac{(1/4)2^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Vi søker en n slik at

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1000}{6} \Leftrightarrow n > 10\sqrt{5/3} \approx 12{,}9,$$

så $n = 13$ delintervaller er tilstrekkelig.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1, 10. DESEMBER 2003

Oppgave 1

(i) Vi har et "0/0"-uttrykk og kan derfor forsøke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hôp}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2e^0}{\cos 0} = \underline{\underline{2}}.$$

(ii) Vi omformer uttrykket til et "0/0"-uttrykk:

$$\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} = \frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}.$$

Vi kan dermed bruke L'Hôpitals regel eller eventuelt rekkeutvikle teller og nevner (vi gjør det siste):

$$\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \frac{x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \cdots} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \cdots}.$$

Dermed:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Oppgave 2

Vi skal løse

$$y' = -2x(y-1),\ \ y(0) = 2.$$

Vi observerer at dette er en separabel førsteordens differensialligning:

$$\frac{1}{y-1}y' = -2x.$$

Vi får dermed $\displaystyle\int \frac{dy}{y-1} = -\int 2x\, dx$, som gir $\ln|y-1| = -x^2 + c$, eller $y = ke^{-x^2} + 1$.

$y(0) = 2$ gir $k = 1$, altså

$$\underline{\underline{y = e^{-x^2} + 1}}.$$

Oppgave 3
Vi kan anta at ligningen

$$x^2y + xy^3 = 2$$

definerer y som funksjon av x i nærheten av punktet $(1, 1)$. Vi deriverer implisitt:

$$2xy + x^2y' + y^3 + x3y^2 \cdot y' = 0.$$

Setter vi inn $x = y = 1$, får vi $2 + y' + 1 + 3y' = 0$, dvs. $y' = -\frac{3}{4}$.

Dermed får tangenten i punktet $(1, 1)$ ligning $\frac{y-1}{x-1} = -\frac{3}{4}$, eller $\underline{\underline{y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}}}$.

Oppgave 4
Vi får

$$dA = 2\pi r\, ds = 2\pi(x + 1)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Siden $\frac{dy}{dx} = \sinh x$ og $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, fås for arealet A av rotasjonsflaten

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} 2\pi(x + 1)\cosh x\, dx \\ &= 2\pi\left[(x + 1)\sinh x - \cosh x\right]_0^{\ln 2} \\ &= 2\pi\left[(\ln 2 + 1) \cdot \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) + 1\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(3\ln 2 + 2).}} \end{aligned}$$

Oppgave 5
Gitt $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sin t} dt$. Vi har ved analysens fundamentalteorem og kjerneregelen

$$F'(x) = 2x \cdot e^{-\sin x^2}.$$

Videre fås

$$F''(x) = 2e^{-\sin x^2} + 2x \cdot (-2x\cos x^2)e^{-\sin x^2}.$$

Dermed $F(0) = F'(0) = 0$ og $F''(0) = 2$ slik at

$$\underline{\underline{P_2(x) = x^2.}}$$

Oppgave 6

a) Med $a_n = \dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$ fås

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{2}.$$

Ved forholdstesten er derfor konvergensradien 2. $x = 2$ gir rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

som er en divergent p-rekke ($p = \frac{1}{2} \leq 1$). Alternativt kan dette sjekkes ved integraltest. $x = -2$ gir den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

som konvergerer fordi $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ går monotont mot 0 når $n \to \infty$.

b) La S betegne summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Siden $\dfrac{1}{4^n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ går monotont mot 0, har vi

$$S - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^{N+1}E_N,$$

med $0 \leq E_N \leq \dfrac{1}{4^{N+1}\sqrt{N+1}}$.

Siden $\dfrac{1}{4^4\sqrt{4}} = \dfrac{1}{512} \approx 0.00195$, kan vi sette

$$L = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{512} \approx \underline{\underline{-0.21385}}$$

med en feil mindre enn 0.00098. Alternativt kan vi finne at

$$\frac{1}{4^5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.00044$$

som er feilskranken om man setter

$$L = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{512} \approx \underline{\underline{-0.21287}}.$$

Oppgave 7

a) Sett $f(x) = e^x - x - 2$.

Vi har

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Videre har vi $f(0) = -1$. Vi splitter i to tilfeller:

1. Når $x \leq 0$, er f strengt avtagende (siden $f'(x) < 0$ for $x < 0$), og vi kan derfor ha høyst én løsning av $f(x) = 0$. Siden $f(-2) = e^{-2} > 0$ og $f(0) = -1 < 0$, gir skjæringssetningen at vi har en løsning i intervallet $(-2, 0)$.
2. Når $x \geq 0$, er f strengt voksende (siden $f'(x) > 0$ for $x > 0$), og vi kan derfor ha høyst én løsning av $f(x) = 0$. Siden $f(0) = -1 < 0$ og $f(2) = e^2 - 4 > 0$, gir skjæringssetningen at vi har en løsning i intervallet $(0, 2)$.

b) Newtons metode gir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n e^{x_n} - e^{x_n} + 2}{e^{x_n} - 1}.$$

$x_0 = 0$ er uegnet fordi vi har $f'(0) = 0$, som gir 0 i nevneren.

Vi setter $x_0 = 1$ og får

x_0	1
x_1	1.16395
x_2	1.14642
x_3	1.14619

Dermed blir svaret $\underline{\underline{1.15}}$.

Oppgave 8

Ved skivemetoden er $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)dx$, hvor

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\, s = \sqrt{3}\, y^2 = \sqrt{3}\,(1 - x^2).$$

Altså: $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)dx = 2\sqrt{3}\,(1 - \frac{1}{3}) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}}}$.

Oppgave 9

Sett $y(t)$ = konsentrasjon av forurensning ved tid t (kg/m^3). Vi får følgende differensialligning:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0.5 \cdot 5 \cdot 10^8 - y \cdot 5 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^9} = \frac{1}{16}(0.5 - y)$$

med initialverdi $y(0) = 2.5$. (Tidsenhet er dager.) Vi løser differensialligningen og får $y = ke^{-\frac{t}{16}} + 0.5$, dvs.

$$y = 2e^{-\frac{t}{16}} + 0.5$$

fordi $y(0) = 2.5$. Vi har $y = 1$ når $e^{-\frac{t}{16}} = \frac{1}{4}$, altså når

$$t = 16 \ln 4 = \underline{\underline{32 \ln 2 \approx 22.18 \text{ dager}}}.$$

Oppgave 10
Vi finner at

- Omkretsen L av området er

$$\begin{aligned} L &= y + 2x + \frac{1}{2}(y + 2x) + \frac{1}{4}(y + 2x) + \cdots \\ &= (y + 2x) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2(y + 2x). \end{aligned}$$

- Arealet A av området er

$$A = xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{16}xy + \cdots = xy \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{4}{3}xy.$$

$L = 6$ gir $y = 3 - 2x$ og altså

$$A(x) = \frac{4}{3}(3x - 2x^2) = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{8} - 2(x - \frac{3}{4})^2\right),$$

dvs. $x = \frac{3}{4}$ og dermed $y = \frac{3}{2}$ gir maksimalt areal. (Maksimalt areal blir $\frac{3}{2}$.)

TMA4100 Matematikk 1
eksamen 02.08.04

Løsningsforslag

1 Ved å bruke L'Hôpitals regel for "0/0"-uttrykk i overgangene merket $(*)$ får vi

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}=\frac{3}{2},$$

(ii) $$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t}\overset{(*)}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t}{1}=1.$$

2 **a)** Differensialligningen er separabel og kan (for $y\neq 0$) skrives

$$\frac{1}{y^2}y'=\frac{1}{x^2+1}.$$

Ved integrasjon får vi

$$-\frac{1}{y}=\arctan x+C.$$

Av initialbetingelsen $y(0)=1$ får vi $C=-1-\arctan 0=-1$. Løsningen er følgelig

$$y=\frac{1}{1-\arctan x},\qquad x<\frac{\pi}{4}.$$

b) Karakteristisk ligning er $r^2-2r-8=0$ med røtter $r_1=4$ og $r_2=-2$. Generell løsning av differensialligningen blir

$$y=Ae^{4x}+Be^{-2x}.$$

Da er $y'=4Ae^{4x}-2Be^{-2x}$, og av initialbetingelsene $y(0)=3$ og $y'(0)=0$ får vi

$$\begin{aligned}A+B&=3\\4A-2B&=0.\end{aligned}$$

Herav følger $A=1$ og $B=2$, og løsningen blir

$$y=e^{4x}+2e^{-2x}.$$

3 Siden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}/\sqrt{n+1}\,|}{|x^n/\sqrt{n}\,|}=\lim_{n\to\infty}|x|\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x|,$$

er rekken $\sum_{n=1}^{\infty}x^n/\sqrt{n}$ absolutt konvergent når $|x|<1$ ifølge forholdstesten og divergent når $|x|>1$ ifølge divergenstesten. Konvergensradien er følgelig $R=1$.

Når $x=1$, får vi rekken $\sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n}$ som er en divergent p-rekke ($p=1/2\leq 1$).

Når $x=-1$, får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ som konvergerer fordi $1/\sqrt{n}$ går monotont mot 0 når $n\to\infty$.

$\boxed{4}$ **a)** Ved implisitt derivasjon med hensyn på x får vi

$$a + b\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right).$$

Løser vi denne ligningen mhp. dy/dx, får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a + axy - y}{b + bxy - x}.$$

Når $(x, y) = (0, 0)$ blir $dy/dx = -a/b$, tangenten i origo har følgelig ligning

$$y - 0 = -\frac{a}{b}(x - 0), \qquad \text{dvs.} \qquad ax + by = 0.$$

b) Setter vi $a = b = 1$ får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + xy - y}{1 + xy - x} = \frac{1 + xy - y}{x - xy - 1}.$$

I et punkt (x, y) på K der $dy/dx = 0$ er $1 + xy - y = 0$. Da er $y = 1/(1 - x)$ som innsatt i den gitte ligningen (med $a = b = 1$) gir

$$x + \frac{1}{1-x} = \ln\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x).$$

Ligningen til bestemmelse av x kan følgelig skrives

$$f(x) = 0 \qquad \text{der} \qquad f(x) = x + \frac{1}{1-x} + \ln(1-x).$$

Funksjonen f er definert for $x < 1$, og den er strengt voksende siden

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(1-x)^2}(-1) + \frac{1}{1-x}(-1) = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^2} = \frac{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{(1-x)^2} > 0.$$

Ligningen $f(x) = 0$ har følgelig høyst én løsning. Siden $f(-2) = -5/3 + \ln 3 < 0$ og $f(0) = 1 > 0$, har ligningen, ifølge skjæringssetningen, en løsning i intervallet $(-2, 0)$.

c) Vi skal finne løsningen $x = r$ av ligningen $f(x) = 0$ ved å bruke Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f(x) = x + \frac{1}{1-x} + \ln(1-x), \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

Vi skal finne r med to desimaler, og bruker fire desimaler i mellomregningene.

n	x_n	$1 - x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1.0000	2.0000	0.1932	0.7500	0.2575
1	-1.2575	2.2575	-0.0007	0.7530	-0.0009
2	-1.2566				

Med to desimaler er $x_1 = x_2$. Avrundet til 2 desimaler er følgelig $r = -1.26$.

$\boxed{5}$ Tiden T som mannen bruker fra A til B er gitt ved

$$T = \frac{20\theta}{6} + \frac{40\cos(\theta/2)}{3}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Ved derivasjon mhp. θ får vi

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{10}{3} - \frac{20\sin(\theta/2)}{3}.$$

Her er $dT/d\theta = 0$ når $\sin(\theta/2) = 1/2$, $\theta/2 = \pi/6$, $\theta = \pi/3$. Minimumsverdien til T må da oppnås for $\theta = \pi/3$, eller for $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$. Avrundet til 2 desimaler får vi

$$T(0) = \tfrac{40}{3} = 13.33, \quad T(\pi/3) = \tfrac{10}{9}\pi + \tfrac{20}{3}\sqrt{3} = 15.04, \quad T(\pi) = \tfrac{10}{3}\pi = 10.47.$$

Følgelig oppnås T_{min} for $\theta = \pi$, mannen bør løpe hele veien fra A til B.

6 Massen m av staven er gitt ved

$$m = \int_{*}^{**} dm = \int_1^3 \delta(x)\,dx = \int_1^3 \frac{2}{x(4-x)}\,dx.$$

Vi bruker delbrøkoppspalting

$$\frac{2}{x(4-x)} = \frac{-2}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4},$$

og multipliserer med $x(x-4)$ for å bestemme A og B. Vi får $-2 = A(x-4) + Bx$ og $x = 0$ gir $A = 1/2$ mens $x = 4$ gir $B = -1/2$. Dermed er

$$m = \tfrac{1}{2}\Big[\ln|x| - \ln|x-4|\Big]_1^3 = \tfrac{1}{2}\big[\big(\ln 3 - \ln 1\big) - \big(\ln 1 - \ln 3\big)\big] = \ln 3 \quad [\text{kg}].$$

7 Ved skivemetoden kan volumet av rotasjonslegemet skrives

$$V = \int_0^{\pi/2} A(y)\,dy.$$

Tverrsnitt vinkelrett på y-aksen er sirkulære med radius x. Siden $y = \arcsin(x-1)$, er $x - 1 = \sin y$, $x = 1 + \sin y$. Dermed er

$$A(y) = \pi(1+\sin y)^2 = \pi(1 + 2\sin y + \sin^2 y) = \pi\left[1 + 2\sin y + \tfrac{1}{2}(1-\cos 2y)\right]$$

og volumet av rotasjonslegemet blir

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}\left[1 + 2\sin y + \tfrac{1}{2}(1-\cos 2y)\right]dy = \pi\Big[\tfrac{3}{2}y - 2\cos y - \tfrac{1}{4}\sin 2y\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{3}{4}\pi^2 + 2\pi.$$

Vi kunne også ha brukt sylinderskallmetoden. Vi kan se på rotasjonslegemet som en sylinder med radius 2 og høyde $\pi/2$ minus rotasjonslegemet vi får når flatestykket *under* kurven $y = \arcsin(x-1)$ for $1 \le x \le 2$ (siden $0 = \arcsin 0$ og $\pi/2 = \arcsin 1$) dreies om y-aksen. Det gir

$$V = 2\pi^2 - \int_1^2 2\pi x \arcsin(x-1)\,dx.$$

Integralet kan vi finne ved å substituere $u = x-1$ og bruke formlene 138 og 139 i Rottmann side 145 for $\int \arcsin u\,du$ og $\int u\arcsin u\,du$:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi^2 - 2\pi\int_0^1 (1+u)\arcsin u\,du = 2\pi^2 - 2\pi\int_0^1 (\arcsin u + u\arcsin u)\,du \\
&= 2\pi^2 - 2\pi\Big[\Big(u\arcsin u + \sqrt{1-u^2}\Big) + \Big(\tfrac{1}{4}(2u^2-1)\arcsin u + \tfrac{1}{4}u\sqrt{1-u^2}\Big)\Big]_0^1 \\
&= 2\pi^2 - 2\pi\left[\left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{8}\pi\right) - 1\right] = \tfrac{3}{4}\pi^2 + 2\pi.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ **a)** Vi har

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{for alle } x.$$

Setter vi $x = -t^2/2$, får vi

$$e^{-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!\,2^n} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!\,2^2} - \frac{t^6}{3!\,2^3} + - \cdots \qquad \text{for alle } t,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!\,2^n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!\,2^n} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!\,2^2} - \frac{x^7}{7\cdot 3!\,2^3} + - \cdots . \end{aligned}$$

Rekkeutviklingen for $f(x)$ konvergerer for alle x siden rekken vi integrerer leddvis konvergerer for alle t.

b) Med $x = 1/2$ får vi

$$\begin{aligned} f(1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+1}}{(2n+1)n!\,2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!\,2^{3n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^4} + \frac{1}{5\cdot 2!\,2^7} - \frac{1}{7\cdot 3!\,2^{10}} + \frac{1}{9\cdot 4!\,2^{13}} - \frac{1}{11\cdot 5!\,2^{16}} + - \cdots . \end{aligned}$$

Rekken er alternerende, og leddenes absoluttverdi avtar mot 0. Siden $1/(7\cdot 3!\,2^{10}) < 0.0001$, setter vi

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^4} + \frac{1}{5\cdot 2!\,2^7} = 0.4799$$

(avrundet til fire desimaler). Da er $|f(1/2) - I| < 1/(7\cdot 3!\,2^{10}) < 0.0001$ ifølge feilskranken i alternerende rekkers test.

Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1 6. desember 2004

Løsning

Oppgave 1

a) Ligningen er separabel og løses på vanlig måte:

$$\ln|y| = \arctan x + C \Longleftrightarrow y = Ke^{\arctan x},$$

hvor C og K er vilkårlige konstanter med $|K| = e^C$. Initialbetingelsen $y(0) = 3$ gir $K = 3$ og dermed $\underline{\underline{y = 3e^{\arctan x}}}$.

b) Den karakteristiske ligningen er

$$2r^2 + 5r - 3 = 0,$$

som har løsninger $r_1 = -3$ og $r_2 = 1/2$. Den generelle løsningen av ligningen blir derfor

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x/2}.$$

Initialbetingelsene gir ligningssystemet $C_1 + C_2 = 1$ og $-3C_1 + (1/2)C_2 = 0$, som har løsning $C_1 = 1/7$, $C_2 = 6/7$. Dermed får vi $\underline{\underline{y = (e^{-3x} + 6e^{x/2})/7}}$.

Oppgave 2

a) Arealet betegnes A. De to kurvene skjærer hverandre i $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Vi får dermed

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = 2/3 - 1/3 = \underline{\underline{1/3}}.$$

b) Området er symmetrisk om $y = x$ fordi $\sqrt{x}$ er den omvendte funksjonen til x^2. Dermed får vi at $\overline{x} = \overline{y}$. Vi beregner momentet om y-aksen

$$M_{x=0} = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = 2/5 - 1/4 = 3/20$$

og får $\overline{x} = (3/20)/(1/3) = 9/20$. Tyngdepunktet er altså $\underline{\underline{(9/20, 9/20)}}$.

Oppgave 3 Vi deriverer ligningen implisitt:

$$5x^4y + x^5y' + 2y^3 + 6xy^2y' = 0. \tag{1}$$

Vi deriverer enda en gang og får:

$$20x^3y + 10x^4y' + x^5y'' + 12y^2y' + 12xy(y')^2 + 6xy^2y'' = 0. \tag{2}$$

Vi setter $x = y = 1$ i (1) og får

$$5 + y'(1) + 2 + 6y'(1) = 0,$$

og dermed $f'(1) = y'(1) = -1$. Vi setter så $x = y = 1$ og $y' = -1$ i (2) og får

$$20 - 10 + y''(1) - 12 + 12 + 6y''(1) = 0$$

og dermed $f''(1) = y''(1) = -10/7$. Taylorpolynomet $P_2(x)$ til f om $x = 1$ er derfor

$$\underline{\underline{P_2(x) = 1 - (x-1) - (5/7)(x-1)^2 = (9 + 3x - 5x^2)/7.}}$$

Oppgave 4 Ved forholdstesten er konvergensradien R gitt ved

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \ln(1 + 1/n)/\ln n) = 1.$$

(Grensen kan eventuelt også beregnes ved L'Hôpitals regel.) Når $x = -1$, har rekken positive ledd. Siden $1/\ln(n+1) > 1/(n+1)$ og den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergerer, gir sammenligningstesten divergens når $x = -1$. Når $x = 1$, er rekken alternerende. Siden $\ln x$ er en voksende funksjon som går mot ∞ når x går mot ∞, går absoluttverdien av leddene **monotont** mot 0 når $n \to \infty$. Rekken konvergerer derfor når $x = 1$ ved testen for alternerende rekker. Konvergensintervallet er dermed $\underline{\underline{(-1, 1]}}$.

Oppgave 5

a) Trapesmetoden gir

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{4}(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) \\ &= (0.5 + 1.0052219 + 1.0425469 + 1.1509929 + 0.6978062)/4 \\ &= 1.099142, \end{aligned}$$

med seks desimalers nøyaktighet. Dermed får vi

$$\int_0^1 e^{x^3/3} dx \approx \underline{\underline{1.099}}.$$

b) Vi deriverer $f(x) = e^{x^3/3}$ to ganger og får $f''(x) = (2x + x^4)e^{x^3/3}$. Vi ser at $f''(x)$ er en voksende funksjon, så den har maksimal absoluttverdi i et av endepunktene $x = 0$ eller $x = 1$. Siden $f''(0) = 0$, oppnås maksimum når $x = 1$, og dermed $|f''(x)| \leq 3e^{1/3}$ når $0 \leq x \leq 1$. Feilen E_4 vi gjør kan estimeres slik:

$$|E_4| \leq \frac{3e^{1/3}}{12 \cdot 4^2} = e^{1/3}/64 \approx \underline{0.0218}.$$

Med n delintervaller har vi

$$|E_n| \leq \frac{3e^{1/3}}{12 \cdot n^2} = \frac{e^{1/3}}{4n^2}.$$

For å være sikker på at $|E_n| < 10^{-4}$ velger vi n slik at

$$\frac{e^{1/3}}{4n^2} < 10^{-4},$$

altså $n > 50e^{1/6} \approx 59.07$, dvs. vi kan velge $\underline{\underline{n = 60}}$.

Oppgave 6

a) For $n = 1$ er begge sider lik $1/2$, så utsagnet gjelder for $n = 1$. Vi antar det gjelder for $n = k$, dvs.

$$\sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m}. \tag{3}$$

Vi finner (induksjonshypotesen (3) brukes mellom linje 1 og 2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} \frac{1}{i} &= \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\
&= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\
&= \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.
\end{aligned}$$

Resultatet følger dermed ved induksjon.

b) Sett

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

Siden $1/x$ er en avtagende funksjon, får vi ved arealbetraktninger

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \leq \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x}.$$

Vi beregner de to integralene og får dermed

$$\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \leq \ln 2.$$

Ved resultatet i punkt a) og skviseregel får vi derfor

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2.$$

Siden leddene i rekken går mot 0, vil de odde partialsummene S_{2n+1} også gå mot $\ln 2$. Altså har vi vist at

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln 2.$$

TMA4100 Matematikk 1 eksamen 16.08.05

Løsningsforslag

1 Grenseverdien er ubestemt av formen "0/0". Gjentatt bruk av L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \underset{\text{L'Hôp.}}{\overset{}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

siden $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$.

Vi kunne også brukt potensrekken for $\sin x$ (Rottmann s. 117):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots\right) = \frac{1}{6}.$$

2 **a)** Den gitte ligningen er separabel og kan (for $y \neq 0$) skrives

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = x^2 - k.$$

Ved integrasjon får vi

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - kx + C.$$

Innsetting av initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = -1$. Løsningen blir altså

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - kx - 1, \qquad \text{dvs.} \qquad y = \frac{-3}{x^3 - 3kx - 3}.$$

b) For $k = -1$ får vi

$$y = \frac{-3}{x^3 + 3x - 3}.$$

Vi søker det største intervallet $(-\infty, a)$ der nevneren $f(x) = x^3 + 3x - 3$ er ulik null. Siden $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, er $f(x)$ strengt voksende. Siden $f(0) = -3 < 0$ og $f(1) = 1 > 0$, må nullpunktet a for $f(x)$ ligge mellom 0 og 1. Vi bruker Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n - 3}{3x_n^2 + 3}$$

med starverdi $x_0 = 0.5$ for å finne en tilnærmet verdi for a:

x_0	0.5
x_1	0.8667
x_2	0.8189
x_3	0.8177
x_4	0.8177

Avrundet til to desimaler er følgelig $a = 0.82$.

$\boxed{3}$ **a)** Arealet av området R er

$$A = \int_0^2 [f(x) - (-f(x))]\, dx = 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^2$$

ved integralformel 6 b) Rottmann s. 133, eller ved omskriving $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ og substitusjon $u = (x+1)/\sqrt{3}$. Siden $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$ og $\tan\pi/6 = 1/\sqrt{3}$, får vi

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b) Når R dreies om aksen $x = -1$, får vi ved sylinderskallmetoden med radius $r = x+1$:

$$V = \int_0^2 2\pi r[f(x) - (-f(x))]\, dx = 2\pi\int_0^2 \frac{2(x+1)}{x^2+2x+4}\, dx.$$

Vi substituerer $u = x^2+2x+4$, $du = (2x+2)dx$ og får

$$V = 2\pi\int_4^{12}\frac{1}{u}\, du = 2\pi\big[\ln u\big]_4^{12} = 2\pi\big[\ln 12 - \ln 4\big] = 2\pi\ln 3.$$

Av symmetrigrunner er $\overline{y} = 0$. Når R dreies om aksen $x = -1$, vil tyngdepunktet beskrive en sirkel med radius $r = \overline{x}+1$. Av Pappus' første teorem følger

$$V = 2\pi(\overline{x}+1)\cdot A \qquad \text{som gir} \qquad \overline{x} = \frac{V}{2\pi A} - 1 = \frac{3\sqrt{3}\ln 3}{\pi} - 1.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi skal vise at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på kurven K med ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} - e^y = x^2 y.$$

Setter vi inn $x = 0$ i $(*)$, får vi

$$2 - e^y = 0 \qquad \text{som gir} \qquad e^y = 2, \quad y = \ln 2.$$

Følgelig ligger $(0, \ln 2)$ på K. Ved implisitt derivasjon av $(*)$ med hensyn på x får vi

$$(**) \qquad 4e^{2x} - e^y y' = 2xy + x^2 y'.$$

Vi setter inn $x = 0$, $y = \ln 2$ og får $4 - 2y' = 0$, $y' = 2$. Tangenten til K i $(0, \ln 2)$ har da stigningstall 2 og ligning $y = 2x + \ln 2$.

b) Vi skal finne Taylorpolynomet $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$ for $y = f(x)$ definert ved ligningen $(*)$. Fra **a)** har vi $f(0) = \ln 2$ og $f'(0) = 2$. Implisitt derivasjon av $(**)$ med hensyn på x gir

$$8e^{2x} - \left(e^y\left(y'\right)^2 + e^y y''\right) = \left(2y + 2xy'\right) + \left(2xy' + x^2 y''\right).$$

Vi setter inn $x = 0$, $y = \ln 2$ og $y' = 2$. Det gir $8 - 2\cdot 2^2 - 2y'' = 2\ln 2$ og følgelig $y'' = -\ln 2$. Dermed er $f''(0) = -\ln 2$, og Taylorpolynomet blir:

$$P_2(x) = \ln 2 + 2x - \frac{\ln 2}{2}x^2.$$

$\boxed{5}$ **a)** Med $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$ fås

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/\sqrt{4(n+1)+1}}{x^n/\sqrt{4n+1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{4n+5}} = |x|.$$

Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer da absolutt når $|x| < 1$ ifølge forholdstesten, og den divergerer når $|x| > 1$ ifølge divergenstesten. Konvergensradien er altså $R = 1$.

For $x = -1$ og $x = 1$ får vi rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Den første konvergerer ifølge alternerende rekkers test ($1/\sqrt{4n+1}$ går monotont mot 0). Den andre kan vi sammenligne med den divergente p-rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{4n+1}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{4n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4+1/n}} = \frac{1}{2}.$$

Siden $L > 0$ følger av grensesammenligningstesten at den gitte rekken er divergent for $x = 1$. Konvergensintervallet er altså $[-1, 1)$

b) Når $x = -1/4$ har vi

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 1 - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4^2\sqrt{9}} - \frac{1}{4^3\sqrt{13}} + \frac{1}{4^4\sqrt{17}} - + \cdots .$$

Rekken er alternerende og leddenes tallverdi avtar mot 0. Siden $4^4\sqrt{17} > 10^3$, setter vi

$$L = 1 - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4^2\sqrt{9}} - \frac{1}{4^3\sqrt{13}} = 0.905$$

(avrundet til 3 desimaler). Da er $|S - L| \le 1/\left(4^4\sqrt{17}\right) = 0.9\cdot 10^{-3}$ ifølge feilskranken i alternerende rekkers test.

$\boxed{6}$ Vi skal bestemme a slik at summen S av arealene av trekantene OAP og BCP på figuren i oppgaven blir minst mulig. Vi regner først ut koordinatene til P for å finne høyden i de to trekantene.

Linjen gjennom O og $B(1,1)$ har ligning $y = x$, og linjen gjennom $C(0,1)$ og $A(a,0)$ har ligning $y = -x/a + 1$. I skjæringspunktet er

$$x = -\frac{x}{a} + 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{a}\right)x = 1, \qquad x = \frac{a}{a+1} = y.$$

For arealet S får vi

$$S = \Delta OAP + \Delta BCP = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{a+1} + \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{a}{a+1}\right) = \frac{a^2+1}{2(a+1)}, \qquad a > 0.$$

Minimumsverdien for S oppnås i et punkt der $dA/ds = 0$. Her er

$$\frac{dS}{da} = \frac{a^2+2a-1}{2(a+1)^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{dS}{da} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Siden $a > 0$ må vi ha $a = \sqrt{2} - 1$. At det gir $S_{\min}$ følger av at $dS/da < 0$ når $0 < a < \sqrt{2} - 1$ og $dS/da > 0$ når $a > \sqrt{2} - 1$.

Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1, 7. desember 2005

Løsning

Oppgave 1 Siden $\cosh 0 = 1$ og den deriverte til $\cosh x$ er $\sinh x$, får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = \sinh 0 = 0.$$

Alternativt kan man observere at man har å gjøre med et 0/0-uttrykk og så f. eks. bruke l'Hôpitals regel. Funksjonen f er kontinuerlig i 0 fordi $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Oppgave 2

a) Vi setter $f(x) = \cosh x - 1 - x$. Vi har $f(1) = \cosh 1 - 2 = (e + 1/e)/2 - 2 < (3 + 1/2)/2 - 2 = -1/4$ (evt. $f(1) = -0.46$ med to desimaler ved bruk av kalkulator) og $f(2) = \cosh 2 - 3 = (e^2 + 1/e^2)/2 - 3 > 7/2 - 3 = 1/2$ (evt. $f(2) = 0.76$ med to desimaler ved bruk av kalkulator). Siden f er kontinuerlig på $[1, 2]$, gir skjæringssetningen at $f(x) = 0$ for minst en x i $(1, 2)$. På den annen side har vi $f'(x) = \sinh x - 1 > \sinh 1 - 1 > 0$ for alle x i $(1, 2)$. Derfor er f strengt voksende på $[1, 2]$, hvilket betyr at vi kan ha høyst en løsning av $f(x) = 0$ i $(1, 2)$.

b) Newtons metode gir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n \sinh x_n - \cosh x_n + 1}{\sinh x_n - 1}.$$

Vi starter iterasjonen med $x_0 = 1.5$ som gir $x_1 = 1.63069...$, $x_2 = 1.61632...$, $x_3 = 1.61613...$. Vi konkluderer at løsningen med to desimaler er $x^* = 1.62$.

Oppgave 3 Denne oppgaven gjøres enklest ved bruk av Pappus' teorem. Arealet av kvadratet er 2, og dets tyngdepunkt (sentroide) er $(2, 0)$. Dermed blir volumet $V = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$. Alternativt kan man f. eks. bruke skivemetoden, som ved symmetri gir

$$V = 2\int_0^1 \pi \; \left[(3-y)^2 - (y+1)^2\right] dy = \frac{2\pi}{3}\left[-(3-y)^3 - (y+1)^3\right]_0^1 = 8\pi.$$

Oppgave 4 Vi har fra formelsamling eller ved utregning via substitusjonen $u = \cos x$ at

$$\int \tan x \; dx = -\ln\cos x + C.$$

(Merk at $\cos x > 0$ siden $-\pi/2 < x < \pi/2$.) Integrerende faktor er derfor $1/\cos x$ slik at ligningen kan omformes til

$$\frac{d}{dx}\left(y/\cos x\right) = \tan^2 x.$$

Her kan vi igjen ty til formelsamling eller huske at den deriverte til $\tan x$ er $\tan^2 x + 1$, slik at vi får

$$y = (\tan x - x + C)\cos x.$$

Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = 1$ og dermed

$$y = \sin x + \cos x - x\cos x.$$

Oppgave 5

a) I løpet av et kort tidsrom $[t, t + \Delta t]$ får vi endringen

$$\Delta x \approx \left(k - (x/10^5)\cdot 1000\right)\Delta t.$$

Vi deler på Δt og lar Δt gå mot 0. Det leder til den separable og lineære ligningen

$$x' = k - x/100, \qquad 0 \le t \le 72.$$

Om vi løser den som en separabel ligning, får vi

$$\int \frac{dx}{x - 100k} = -\int \frac{dt}{100},$$

altså

$$x = 100k - Ce^{-t/100}.$$

Initialbetingelsen $x(0) = 0$ gir $C = 100k$, og dermed

$$x = 100k\left(1 - e^{-t/100}\right).$$

b) $x(t)$ vil nå sitt maksimum når $t = 72$. Vi må altså ha $x(72) = 0.015 \cdot 10^5 = 1500$. Det gir

$$k = \frac{15}{1 - e^{-72/100}} = 29.2 \quad \text{(kg/time)},$$

avrundet med en desimal.

Oppgave 6 Vi begynner med å delbrøkoppspalte integranden:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Setter vi på felles brøkstrek, får vi ligningssystemet $A + B + C = 0$, $5A + 4B + 3C = 0$, $6A + 3B + 2C = 1$, som har løsning $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. (Et alternativ til å løse ligningssystemet er å gange med de respektive faktorene $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ og så lese av A, B, C ved innsetting av de respektive punktene -1, -2, -3.) Dermed får vi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^R = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

siden

$$\lim_{R\to\infty} \ln\frac{(R+1)^{1/2}(R+3)^{1/2}}{R+2} = \lim_{R\to\infty} \ln\frac{(1+1/R)^{1/2}(1+3/R)^{1/2}}{1+2/R} = \ln 1 = 0.$$

Oppgave 7

a) Fra rekken for $\cos x$ får vi

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+2)!}.$$

Det må kunne antas kjent at Maclaurin-rekken til $\cos x$ konvergerer for alle reelle x, slik at vår rekke også konvergerer for alle x. Alternativt kan vi bruke forholdstest: Med $c_k = (-1)^{k+1}x^{2k}/(2k+2)!$ får vi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{(2k+3)(2k+4)} = 0$$

for alle x.

b) Ved resultatet i a) får vi følgende rekkerepresentasjon for integralet:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k+2)!}.$$

Vi observerer at dette er en alternerende rekke der leddene avtar i absoluttverdi og dessuten går mot 0. Vi kan derfor bruke feilestimat for alternerende rekke. Siden $(2\cdot 3+1)(2\cdot 3+2)! = 282240 > 10000$, klarer vi oss med tre ledd:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{72} - \frac{1}{3600} = -\frac{1751}{3600} = -0.4864,$$

avrundet med fire desimaler.

TMA4100 Matematikk 1 eksamen 18.08.06

Løsningsforslag

1 Grenseverdien er ubestemt av formen "0/0". To gangers bruk av L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x} \underset{\text{L'Hôp.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-2\sin 2x} \underset{\text{L'Hôp.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{-4\cos 2x} = \frac{1}{4}.$$

2 **a)** Den gitte rekken er en sum av to geometriske rekker. Ved å bruke summeformelen $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a/(1-r)$ for geometriske rekker med $|r|<1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3}+\frac{5}{1-1/3} = 3+\frac{15}{2} = \frac{21}{2}.$$

b) Ved forholdstesten er konvergensradien R gitt ved

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n} = \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1.$$

For $x=\pm1$ får vi rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\arctan n} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\arctan n}.$$

Begge rekkene divergerer ifølge n-teleddstesten for divergens siden $\lim_{n\to\infty}\arctan n = \pi/2$.

3 Den gitte differensialligningen er separabel, og kan (for $2y-3\neq 0$) skrives

$$\frac{2}{2y-3}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Ved integrasjon får vi $\ln|2y-3| = \ln(x^2+1)+C$. Det gir

$$2y-3 = C_1(x^2+1)$$

der $C_1 = \pm e^C$. Innsetting av initialbetingelsen $y(0)=1$ gir $C_1=-1$. Løsningen blir altså

$$2y-3 = -(x^2+1) \qquad \text{dvs.} \qquad y = 1-\frac{x^2}{2}.$$

4 **a)** Arealet A av rektangelet R er grunnlinjen ganget med høyden:

$$A = (9-t)\sqrt{t} = 9t^{1/2}-t^{3/2}, \qquad 0\le t\le 9.$$

For $t=0$ og for $t=9$ er $A=0$. Maksimumsverdien oppnås derfor i et punkt i det åpne intervallet $(0,9)$ der $dA/dt=0$. Derivasjon gir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{9}{2}t^{-1/2}-\frac{3}{2}t^{1/2} = \frac{9}{2\sqrt{t}}-\frac{3}{2}\sqrt{t} = \frac{9-3t}{2\sqrt{t}}.$$

Følgelig får arealet sin største verdi når $t=3$ (eneste mulighet), og $A_{\max} = 6\sqrt{3}$.

b) Et kvadrat med side t har areal t^2. Vi må følgelig løse ligningen $(9-t)\sqrt{t} = t^2$ med hensyn på t. Etter forkorting med $\sqrt{t}$ kan ligningen skrives

$$t^{3/2} + t - 9 = 0.$$

Vi innfører $f(t) = t^{3/2} + t - 9$ og bruker Newtons metode:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{t_n^{3/2} + t_n - 9}{\frac{3}{2}t_n^{1/2} + 1} = \frac{t_n^{3/2} + 18}{3t_n^{1/2} + 2}.$$

Vi kan starte med $t_0 = 4.5$ (midt i intervallet). Avrundet til fire desimaler får vi

$$t_1 = 3.2934, \qquad t_2 = 3.2208, \qquad t_3 = 3.2205.$$

Svaret er følgelig $t = 3.22$.

5 **a)** Differensialligningen er $y' = x + y^2$. Ifølge Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ er $y(x_n) \approx y_n$ der x_n og y_n er definert rekursivt ved

$$x_{n+1} = x_n + 0.1, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n^2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fra initialbetingelsen $y(0) = 1$ får vi $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Da blir

$$x_1 = 0.1,\ y_1 = 1.1, \qquad x_2 = 0.2,\ y_2 = 1.231, \qquad x_3 = 0.3,\ y_3 = 1.4025361.$$

Følgelig er $y(0.3) \approx y_3 = 1.403$ (avrundet til tre desimaler).

b) Vi har gitt $y(0) = 1$, og av differensialligningen følger $y'(0) = 1$. Deriverer vi differensialligningen med hensyn på x, får vi

$$y''(x) = 1 + 2y(x)y'(x).$$

Det gir $y''(0) = 3$. Taylorpolynomet $P_2(x)$ til $y(x)$ om $x = 0$ er altså

$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{3}{2}x^2.$$

Følgelig er $P_2(0.3) = 1.435$.

6 Kurven $y = 3x - x^2$ skjærer x-aksen i 0 og 3. Ved å bruke sylinderskallmetoden får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_*^{**} 2\pi r\, dA = 2\pi \int_0^3 (x+1)(3x - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx = 2\pi \Big[\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^3 = \tfrac{45}{2}\pi. \end{aligned}$$

7 Vi kan uttrykke buelengden til kurven $y = f(x)$ som et integral, og har da gitt at

$$\int_1^u \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \tfrac{1}{3}u^3 + u - \tfrac{4}{3} \qquad (\text{for } u \geq 1).$$

Ved derivasjon med hensyn på u får vi

$$\sqrt{1 + [f'(u)]^2} = u^2 + 1.$$

Det gir

$$\big[f'(u)\big]^2 = u^4 + 2u^2 \qquad \text{dvs.} \qquad f'(u) = \pm u\sqrt{u^2 + 2}.$$

Her må vi velge fortegnet + siden f skal være ikkenegativ. Ved integrasjon får vi

$$f(u) = \tfrac{1}{3}(u^2 + 2)^{3/2} + C.$$

Betingelsen $f(1) = 0$ gir $C = -\sqrt{3}$. Med x som fri variabel blir dermed svaret

$$f(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} - \sqrt{3}.$$

TMA4100 Matematikk 1
Høst 2006

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, avsluttende eksamen 15.12.2006

$\boxed{1}$ Den første grenseverdien er en ubestemt form av typen "0/0", og L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Den andre grenseverdien er av form "1^∞". Vi innfører derfor en ny variabel

$$y=\ln\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}\right]=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{\ln(1-x^2/2)}{x^2}.$$

Denne er av form "0/0" når $x\to 0$, og L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x^2/2}(-x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1-x^2/2)}=-\frac{1}{2},$$

og derfor er den opprinnelige grenseverdien gitt ved

$$\lim_{x\to 0}e^y=\underline{\underline{e^{-1/2}=\frac{1}{e^{1/2}}}}.$$

$\boxed{2}$ Vi faktoriserer nevner og skriver på delbrøk:

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}.$$

Ganger vi så med $x(x+1)$, får vi

$$x-2=A(x+1)+Bx.$$

Ved å sette $x=0$ får vi $-2=A$, og $x=-1$ gir $-3=-B$, dvs. $B=3$. Altså er

$$\int\frac{x-2}{x^2+x}\,dx=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}\right)dx=\underline{\underline{3\ln|x+1|-2\ln|x|+C=\ln(|x+1|^3)-\ln(x^2)+C}}.$$

$\boxed{3}$ Den første rekken skriver vi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, der $a_n=\dfrac{n+1}{n}$. Men siden

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

ser vi at leddene $(-1)^n a_n$ i rekken ikke konvergerer mot null. Fra n-te leddstesten konkluderer vi derfor at

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}\quad\text{divergerer.}}}$$

Den andre rekken skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, der $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. Vi ser at når n er stor, så er leddet 1 i nevneren til a_n neglisjerbart sammenlignet med leddet n^2, så vi forventer at rekken oppfører seg på samme måte som rekken med ledd

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

For å bevise denne formodningen bruker vi grensesammenligningstesten. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1,$$

konkluderer vi fra grensesammenligningstesten at rekkene $\sum a_n$ og $\sum b_n$ enten begge konvergerer eller begge divergerer. Men $\sum b_n$ er ikke annet enn den harmoniske rekken, som vi vet divergerer. Svaret er altså at

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad \text{divergerer.}}}$$

$\boxed{4}$ Både T og sylinderen som bores ut er rotasjonslegemer om y-aksen, og det samme er derfor tilfellet for den gjenværende delen av T, som vi kaller S. Vi ser at S fremkommer ved å rotere området

$$1 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 4 - x^2$$

om y-aksen. Sylinderskallmetoden gir da volumet V av S som integralet

$$V = \int_1^2 2\pi x(4-x^2)\,dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = 2\pi\left[(8-4) - \left(2 - \frac{1}{4}\right)\right] = 2\pi\frac{9}{4} = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}.$$

Alternativt kan vi bruke skivemetoden med tverrsnitt vinkelrett på y-aksen. Da må vi først merke oss at den øvre integrasjonsgrensen for y er $4-1^2 = 3$. Tverrsnittet er da en sirkulær ring med indre radius lik 1 og med ytre radius lik

$$x = \sqrt{4-y},$$

som vi får ved å løse $y = 4 - x^2$ for x, med $x \ge 0$. Vi får da

$$V = \int_0^3 \pi\left[\left(\sqrt{4-y}\right)^2 - 1^2\right] dy = \int_0^3 \pi\left[(4-y)-1\right] dy = \pi\left[3y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^3 = \pi\left(9 - \frac{9}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}.$$

Enkelte vil kanskje tolke denne oppgaven slik at det kun er en sylinder med plan toppflate som bores ut. I så fall må vi legge til volumet av kalotten som er igjen på toppen, som ved sylinderskallmetoden er

$$V' = \int_0^1 2\pi x\left[(4-x^2)-3\right] dx = \frac{\pi}{2},$$

og totalvolumet blir da $V + V' = \dfrac{9\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 5\pi$.

$\boxed{5}$ Ved å sette $x = t^2$ inn i den oppgitte rekken for $\sin x$, får vi

$$\begin{aligned}\sin(t^2) &= t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Ved å dividere hvert ledd med t^2 får vi rekken

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t^2)}{t^2} &= 1 - \frac{t^4}{3!} + \frac{t^8}{5!} - \frac{t^{12}}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

At denne rekken konvergerer for alle t kan vi slutte direkte fra det faktum at rekken for $\sin x$ konvergerer for alle x. (Evt. kan man bruke forholdstest for å se dette.) Leddvis integrasjon er derfor gyldig, og gir følgende representasjon av funksjonen f:

$$\begin{aligned}f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}\,dt \\ &= \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)\cdot(2k+1)!}}} \\ &= \underline{\underline{x - \frac{x^5}{5\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)\cdot(2k+1)!} + \cdots}}.\end{aligned}$$

For å besvare det siste spørsmålet, setter vi $x = 1$, som gir

$$\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 9!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(4k+1)\cdot(2k+1)!} + \cdots.$$

Dette er en alternerende rekke hvis ledd—i absoluttverdi—er monotont avtagende og konvergerer mot null. Vi kan derfor anvende resteleddsestimatet for slike alternerende rekker, som sier at

$$|\text{restledd}| \le |\text{neste ledd}|.$$

Vi må derfor finne det første leddet i rekken med absoluttverdi mindre enn 10^{-6}. Utregning gir $5\cdot 3! = 30$, $9\cdot 5! = 1080$, $13\cdot 7! = 65520$ og $17\cdot 9! = 6\,168\,960 > 10^6$. Vi har derfor

$$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt \approx 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} = \frac{190187}{196560} \approx 0{,}967577}}$$

med avvik garantert mindre enn 10^{-6} i absoluttverdi.

$\boxed{6}$ Fra figuren ser vi at

$$\tan\theta = \frac{x}{100},$$

og derivasjon mhp. tiden t gir, siden $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = 1 + \tan^2\theta$,

$$\left(1 + \tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Men $dx/dt = 5$, og i det øyeblikk $x = 200$, har vi $\tan\theta = 200/100 = 2$, så

$$(1+2^2)\frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{100}$$

Svaret er derfor

$$\underline{\underline{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100} \quad \text{rad/s.}}}$$

$\boxed{7}$ **a)** Vi separerer de variable:

$$\frac{dx}{a-bx} = dt,$$

og integrerer:

$$\int \frac{dx}{a-bx} = \left(-\frac{1}{b}\right)\ln|a-bx| = \int dt = t + C_1.$$

Siden $x = 0$ når behandlingen starter, ser vi at $a-bx$ må være positiv, så vi kan fjerne absoluttverdien. Det gir

$$\ln(a-bx) = -bt + C_2,$$

og videre

$$a - bx = e^{\ln(a-bx)} = e^{-bt+C_2} = Ce^{-bt} \qquad \left(C = e^{C_2}\right).$$

Løser vi dette for x, får vi

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{1}{b}\left(a - Ce^{-bt}\right).}}$$

(Sunn fornuft sier at $x = 0$ ved starten av behandlingen, så hvis man setter $t = 0$ ved starten av behandlingen, må det godtas å bruke $x(0) = 0$ som en initialbetingelse. I så fall blir svaret $x(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$.)

Vi ser da at

$$\underline{\underline{\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b} - \frac{C}{b}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-bt}\right) = \frac{a}{b},}}$$

der vi brukte at $\lim_{t\to\infty} e^{-bt} = 0$, siden $b > 0$.

b) Vi setter $t = 0$ i det klokken er 13.00. De gitte betingelsene sier da:

(1) $\quad x(0) = 0,$

(2) $\quad x(1) = 10,$

(3) $\quad x(2) = 15.$

Betingelsen (1) gir:

$$x(0) = \frac{a-C}{b} = 0 \implies C = a.$$

Derfor er

$$x(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Betingelsene (2) og (3) gir da

(4) $\quad \frac{a}{b}\left(1 - e^{-b}\right) = 10,$

(5) $\quad \frac{a}{b}\left(1 - e^{-2b}\right) = 15,$

og dette ligningssystemet må løses for a og b. Knepet er nå å se at

$$\left(1-e^{-2b}\right)=\left(1-e^{-b}\right)\left(1+e^{-b}\right),$$

fra 3. kvadratsetning. Deler vi ligning (5) på ligning (4), får vi derfor

$$1+e^{-b}=\frac{15}{10}\implies e^{-b}=\frac{1}{2}\implies b=\ln 2.$$

Innsatt i (4) gir dette

$$\frac{a}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}=10\implies a=20\ln 2.$$

Vi konkluderer at

$$x(t)=20\left(1-e^{-t\ln 2}\right)=20\left(1-2^{-t}\right).$$

Vi løser til slutt ligningen $x(t)=19$, dvs.,

$$20\left(1-e^{-t\ln 2}\right)=19\iff e^{-t\ln 2}=\frac{1}{20}\iff t=\frac{\ln 20}{\ln 2}\approx 4{,}32,$$

som omregnet til klokkeslett blir $13+4=17$ timer og $0{,}32\cdot 60=19{,}20$ minutter. Vi ignorerer sekunder, og svaret blir derfor nitten minutter over fem om ettermiddagen:

$$\underline{\underline{\text{konsentrasjonen når 19 mg/l klokken 17.19}}}$$

LØSNINGSFORSLAG

TMA4100, MATEMATIKK 1

KONT. 2007

Oppgave 1

Vi har

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Her er

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 0,$$

der l'Hoptitâl er brukt i overgangen merket $"\frac{0}{0}"$.

Altså er

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

På neste delspørsmål kan en bruke l'Hoptitâl tre ganger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cos x^2 - 2x}{6x^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2 - 1}{3x^4} \overset{"\frac{0}{0}"}{=}$$

.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x\sin x^2}{12x^3} = -\frac{1}{6}\frac{\sin x^2}{x^2} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} -\frac{1}{6}\frac{2x\cos x^2}{2x} = -\frac{1}{6}.$$

Alternativt kan en bruke Taylorrekka til $\sin u$, sette $u = x^2$, og se at grenseverdien blir $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Oppgave 2

Kurva $x = 2y - y^2$ skjærer $y-$aksen for $y = 0$ og $y = 2$. Altså er området som skal roteres om linja $y = -1$ gitt ved $\left\{(x,y) : 0 \le x \le 2y - y^2, 0 \le y \le 2\right\}$.

Ved sylinderskallmetoden er

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta y\,,$$

der

$$r = 1 + y \text{ og } h = 2y - y^2\,.$$

Dette gir volumet

$$V = \int_0^2 2\pi(1+y)(2y-y^2)\,dy = \frac{16\pi}{3}\,.$$

Oppgave 3

Kurvene $y = x^3$ og $y = \sqrt[3]{x}$ skjærer hverandre i $(0,0)$ og $(1,1)$, og for $0 \le x \le 1$ er $\sqrt[3]{x} - x^3 \ge 0$. Altså er arealet begrenset av de to kurvene gitt ved

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^3\right)dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Området er symmetrisk om linja $y = x$ siden $y = \sqrt[3]{x}$ og $y = x^3$ er omvendt funksjon til hverandre. Altså er $\overline{x} = \overline{y}$, der $(\overline{x}, \overline{y})$ er tyngdepunktet. Vi har

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \left(x^{\frac{4}{3}} - x^4\right)dx = 2\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{35}\,.$$

Det vil si at tyngdepunktet er $\left(\frac{16}{35}, \frac{16}{35}\right)$.

Oppgave 4

Ligninga $y' = y^2 + \frac{1}{1-x}$, og initialbetingelsen $y(0) = 0$ er gitt. Med steglenge $h = 0.2$ gir det følgende rekursjonsformel for Eulers metode:

$$x_{n+1} = x_n + h,\ x_0 = 0\,, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.2\left(y_n{}^2 + \frac{1}{1-x_n}\right),\ y_0 = 0\,.$$

Dette gir

$$x_1 = 0.2,\ y_1 = 0 + 0.2\left(0^2 + \frac{1}{1-0}\right) = 0.2\,,$$

$$x_2 = 0.4,\ y_2 = 0.2 + 0.2\left((0.2)^2 + \frac{1}{1-0.2}\right) = 0.458\,.$$

Altså er tilnærmet verdi for $y(0.4)$ gitt ved $y_2 = 0.458$.

Oppgave 5

For $n=1$ har vi $a_1 = 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, som stemmer.

Anta nå at $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ for en vilkårlig $n \ge 1$. Da er

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)} =$$

$$\sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)\right)} = 2\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right),$$

der vi kan ta vekk absoluttverditegnet siden $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) > 0$.

Ved induksjon er altså $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ for $n = 1,2,3\ldots$.

Oppgave 6a

La $a_n = \frac{n}{n^3+1}$ og $b_n = \frac{1}{n^2}$. Da er $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ er en konvergent p -rekke ($p=2$), er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ konvergent ved grensesammenligningstesten. Alternativt kan man bruke sammenligningstesten med samme rekka. Siden $0 < a_n = \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n^2}$, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. Integraltesten er også mulig, men arbeidsom.

For å undersøke rekka $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, la $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Da er $\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^{\infty} = \infty$, der integralet er beregnet ved variabelbytte $u = \ln x$. Altså divergerer $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ ved integraltesten.

Oppgave 6b

Fra formelsamlingen har en $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ for $|x| < 1$. Alternativt, har vi

$\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{1-(-u^2)}$. For $|x| < 1$ oppfyller integrasjonsvariablen u ulikheten

$|u| < 1$. Altså er $|-u^2| < 1$ for $|x| < 1$, og vi anvende formelen for summen til en geometrisk rekke. Slik at for $|x| < 1$ er

$\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1-(-u^2)} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n \right) du = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \right) du$. For $|x| < 1$ kan vi bytte om rekkefølgen på summasjon og integrasjon. Altså har vi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{for} \, |x| < 1.$$

Dette gir Taylorrekka

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \quad \text{for} \, |x| < 1.$$

Altså er

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\arctan x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{10}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{10^{2n+1} (2n+1)^2}.$$

Dette er en alternerende rekke, og vi løser ulikheten $\frac{1}{10^{2n+1}(2n+1)^2} < 10^{-8}$ for å bestemme antall ledd som er tilstrekkelig for ønsket presisjon. Ved inspeksjon ser vi at $n = 3$ er minste heltallsverdi som oppfyller ulikheten. Ved restestimat for alternerende rekke er altså

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\arctan x}{x} dx \approx \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \frac{1}{10^{2n+1}(2n+1)^2} = 0.09988929,$$

med feil mindre enn 10^{-8}.

Oppgave 7a

Volumet til ballongen ved tiden t er $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, og overflatearealet til ballongen er $A(t) = 4\pi r^2(t)$. Ballongen lekker med en rate på $kA(t)$, mens den fylles med raten $Q = 4\pi$ cm^3/min. Dette gir ligninga (massebalanse)

$$\frac{dV}{dt}(t) = Q - kA(t).$$

Vi har $\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t)\frac{dr}{dt}(t)$. Altså er

$$4\pi r^2(t)\frac{dr}{dt}(t) = 4\pi - k4\pi r^2(t).$$

Slik at for $0 < r(t) < 10$ kan dette skrives som

$$\left(\frac{r^2(t)}{r^2(t)-\frac{1}{k}}\right)\frac{dr}{dt}(t) = -k\ .$$

Vi setter $k = \frac{1}{100}$, som gir

$$\left(\frac{r^2(t)}{r^2(t)-100}\right)\frac{dr}{dt}(t) = -\frac{1}{100}. \qquad (*)$$

Polynomdivisjon gir $r^2 : (r^2 - 100) = 1 + \frac{100}{r^2-100}$.

Altså er

$$\left(1+\frac{100}{r^2-100}\right)\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{100}.$$

Denne oppgaven kan også løses uten polynomdivisjon ved å sette uttrykket i parentesen i det oppgitte svaret på fellesnevner og sammenligne med (*).

Oppgave 7b

Ligninga er separabel, og allerede på separert form. Dette gir

$$\int\left(1+\frac{100}{r^2-100}\right)dr = -\int\frac{dt}{100} \iff \int\left(1+\frac{100}{(r+10)(r-10)}\right)dr = -\frac{t}{100}+C \iff$$

$$\int\left(1+5\left(\frac{1}{r-10}-\frac{1}{r+10}\right)\right)dr = -\frac{t}{100}+C \iff r - 5\ln\left|\frac{r+10}{r-10}\right| = -\frac{t}{100}+C.$$

$r(0)=0$ gir $C=0$. Altså er løsninga $r(t)$ gitt implisitt ved

$$r(t) - 5\ln\left|\frac{r(t)+10}{r(t)-10}\right| = -\frac{t}{100}.$$

For å finne t når $r(t)=5$, setter vi $r(t)=5$ i uttrykket over. Dette gir

$t=500(\ln 3-1)\approx 49.306$. Altså er $r=5$ cm ved tiden $t=500(\ln 3-1)$ min.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fasit TMA4100
19-12-2007

1

1 **a)** Vi faktoriserer og får

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3} = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}.$$

b) Vi bruker l'Hopital's regel og får følgende regning:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x+\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1+\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}(1/x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}} = 0.$$

2 **a)** La $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n})^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ der $a_n(x) = (\frac{x}{n})^n$. Vi bruker rot-kriteriet: Sett

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}(a_n(x))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0$$

Siden $\rho(x) = 0 < 1$ for alle $x \in \mathbf{R}$ følger det at $P(x)$ er konvergent for alle $x \in \mathbf{R}$.

3 **a)** La V betegne volumet til rotasjons legemet. Vi bruker sylindriske skjell metoden og får

$$V = \int_0^1 A(y)dy$$

der $A(y)$ er arealet av området som fremkommer når vi roterer linjen mellom punktene $(y, \sqrt{y})$ og $(y, -\sqrt{y})$ om linjen $y = 2$. Vi får

$$A(y) = 2\sqrt{y}(2\pi(2-y)) = 4\pi(2y^{1/2} - y^{3/2}).$$

Vi beregner V:

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 4\pi(2y^{1/2} - y^{3/2})dy = 4\pi[\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}]_0^1 =$$

$$4\pi[4/3 - 2/5] = \frac{56\pi}{15}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi bruker Euler's metode med $x_0 = y_0 = 0$, $dx = 1/3$, $x_n = x_0 + ndx$ samt

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)dx$$

der $f(x, y) = 3xy + 1$. Vi får

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)dx =$$

$$0 + f(0, 1/3)(1/3) = \frac{1}{3}$$

og

$$x_1 = x_0 + dx = \frac{1}{3}.$$

Videre regning gir

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx =$$

$$\frac{1}{3} + f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} + (\frac{1}{3} + 1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

og

$$x_2 = x_1 + dx = \frac{2}{3}.$$

Vi får

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)dx = \frac{7}{9} + f(\frac{2}{3}, \frac{7}{9}) = \cdots = \frac{44}{27}.$$

Svar: $y(1) \cong \frac{44}{27}$.

$\boxed{5}$ **a)**

b) Vi beregner $f''(x)$:

$$f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))$$

og

$$f''(x) = \sin(x)\sin(\sin(x)) - \cos^2(x)\cos(\sin(x)).$$

Vi bruker triangel ulikheten $|a + b| \leq |a| + |b|$ og får

$$|f''(x)| \leq |\sin(x)\sin(\sin(x))| + |\cos^2(x)\cos(\sin(x))| \leq$$

$$|\sin(x)||\sin(\sin(x))| + |\cos^2(x)||\cos(\sin(x))| \leq 1 + 1 = 2.$$

c) Velg $M_2 = 2$. Vi bruker trapes metoden og får følgende:

$$\int_0^1 f(x)dx = T_n + E_n$$

der

$$|E_n| \leq \frac{M_2(1-0)^3}{12n^2} = \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \leq 0.01.$$

Om vi velger $n \geq 5$ følger det at $|E_n| \leq 0.01$. Vi har at

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

der $\Delta x = (b-a)/n = 1/n = 1/5$, $x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{5}$ og $y_i = f(x_i)$. Vi får

$$T_5 = \frac{1}{10}(f(0) + 2f(1/5) + 2f(2/5) + 2f(3/5) + 2f(4/5) + f(1)) =$$

$$\frac{1}{10}(1 + 1.96066 + 1.85026 + 1.68956 + 1.50709 + 0.66637) = 0.86739.$$

Svar: $\int_0^1 f(x)dx = 0.87$.

$\boxed{6}$ **a)** Ligningen

$$\frac{dB}{dt} = \frac{3}{10}B - r$$

er separabel. Vi separerer variablene og integrerer:

$$\frac{1}{\frac{3}{10}B - r}dB = dt$$

$$\frac{1}{B - \frac{10}{3}r}dB = \frac{3}{10}dt$$

$$\int \frac{1}{B - \frac{10}{3}r}dB = \int \frac{3}{10}dt$$

som gir ligningen

$$\ln|B - \frac{10}{3}r| = \frac{3}{10}t + C$$

der $C \in \mathbf{R}$. Vi får

$$|B - \frac{10}{3}r| = e^{\frac{3}{10}t+C} = De^{\frac{3}{10}t}$$

der $D > 0$. Dette gir

$$B(t) = \frac{10}{3}r + Ee^{\frac{3}{10}t}$$

med $E \in \mathbf{R}$. $B(0) = 50$ gir at $E = 50 - \frac{10}{3}r$ og vi får da løsningen

$$B(t) = \frac{10}{3}r + (50 - \frac{10}{3}r)e^{\frac{3}{10}t}.$$

For at $B(t)$ skal være konstant ser vi at følgende må holde:

$$50 - \frac{10}{3}r = 0$$

som gir

$$r = 15.$$

b) Anta at $r > 15$. $B(t) = 0$ gir ligningen

$$\frac{10}{3}r + (50 - \frac{10}{3}r)e^{\frac{3}{10}t} = 0.$$

Vi får

$$\frac{150 - 10r}{3}e^{\frac{3}{10}t} = -\frac{10r}{3}$$

$$\frac{10r - 150}{3}e^{\frac{3}{10}t} = \frac{10r}{3}$$

$$e^{\frac{3}{10}t} = \frac{10r/3}{(10r-150)/3} = \frac{10r}{10r-150}.$$

Dette gir

$$\frac{3}{10}t = \ln|\frac{10r}{10r-150}|$$

og vi får

$$t = \frac{10}{3}\ln|\frac{r}{r-15}|.$$

$\boxed{7}$ **a)** Et punkt P på grafen til $y(t)$ der $a \in (0, \sqrt{3})$ er gitt ved

$$P = (a, y(a)) = (a, 2\sqrt{3-a^2}).$$

Ligningen til tangenten L til grafen $y(t)$ i punktet P er gitt ved

$$L(x) = y(a) + y'(a)(x-a).$$

Vi ser at

$$y'(t) = \frac{-2t}{\sqrt{3-t^2}}.$$

Vi får at

$$L(x) = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a)$$

er en likning for tangenten $L(x)$ i punktet $(a, y(a))$. Vi beregner punktene $(A, 0)$ og $(0, B)$ der tangenten $L(x)$ skjærer x-aksen og y-aksen. y-aksen:

$$B = L(0) = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(-a) = \cdots = \frac{6}{\sqrt{3-a^2}}.$$

x-aksen:

$$L(x) = 0$$

gir ligningen

$$0 = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a)$$

$$\frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a) = 2\sqrt{3-a^2}$$

som gir

$$x - a = \frac{3-a^2}{a}.$$

Vi får punktet

$$A = a + \frac{3-a^2}{a} = \frac{3}{a}$$

som er punktet der L skjærer x-aksen. Kvadratet av avstanden d mellom A og B som en funksjon av $a = t$ er gitt ved

$$D(t) = A^2 + B^2 = (\frac{3}{t})^2 + (\frac{6}{\sqrt{3-t^2}})^2 = \frac{9}{t^2} + \frac{36}{3-t^2} =$$

$$27\frac{1+t^2}{3t^2-t^4}$$

(å minimere d^2 er ekvivalent med å minimere d). Vi deriverer (mhp. t) og får

$$D'(t) = \frac{2t(3t^2 - t^4) - (1 + t^2)(6t - 4t^3)}{t^4(3 - t^2)^2} = \cdots =$$

$$2\frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^3(3 - t^2)^2} = 2\frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{t^3(3 - t^2)^2}.$$

Vi ser at $D'(t) = 0$ om $t = \pm 1$ og $t = 1$ er løsningen på intervallet $I = (0, \sqrt{3})$. Vi får

$$d(1) = \sqrt{D(1)} = \sqrt{27} \cong 5.2.$$

Dvs. stigen må minst være 5.2 meter lang.

Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

FASIT til KONTINUASJONSEKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1
Nynorsk
Laurdag 16. august 2008
Kl. 9 – 13

Dette er en fasit og oppfyller ikke kravet om at alle svar skal begrunnes! Det tas forbehold om mulige feil.

Oppgåve 1

a)

$$f'(x) = \frac{3x(x^3+8)}{(x^3-4)^2}.$$

Lokalt maks i $(-2, 2)$.

Lokalt min i $(0, 1)$.

b) Horisontal asymptote: $y = 1$.

Vertikal asymptote: $x = 4^{1/3}$.

For skisse av grafen, se egen fil (kommer senere).

Av disse resultatene samt fortegnsdrøfting av f', innsees at

$f(x) \geq 1$ for $x < 4^{1/3}$.

Videre er f strengt voksende for $x > 4^{1/3}$, $f(2) = -2 < 0$ og $f(4) = 1/5 > 0$. Skjæringssetningen gir da at f har et nullpunkt i intervallet $[2, 4]$ og dette er det eneste.

Oppgåve 2

$$2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C.$$

Oppgåve 3 Konvergensradien $r = 1$. Rekka konverger for $x = \pm 1$.

Oppgåve 4 Formelen for K følger av at Volum $= 1/3x^3$ og Areal av grunnflate $= x^2$

Siste del følger ved å finne nullpunktet til

$$f(x) = 0{,}04x^3 + 0{,}17x^2 - 50.$$

Newtons metode gir rekursjonsformelen:

$$x_{n+1} = \frac{8x_n^3 + 17x_n^2 + 5000}{12x_n^2 + 34x_n}$$

Det er en dårlig ide å starte med x_0 nær 0, men med feks $x_0 = 10$ får en raskt $x_* = 9,53$.

Oppgåve 5

$$y(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{1 - x^2}) - \frac{1}{2}e^{-\arcsin x}.$$

Oppgåve 6

Gitt ε med $0 < \varepsilon < 1$. Sett $\delta = \varepsilon^2$. Vis at da vil

$$|x| < \delta \implies |\sqrt{1 + x} - 1| < \varepsilon.$$

Utvidet løsningsforslag
Eksamen i TMA4100 Matematikk 1, 16/12 2008

Oppgave 1 i) Vi gjør substitusjonen $u = \sin\theta$ og får

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \int_0^1 u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

En annen løsningsmetode er

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-(-1) - (-1)\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ii) Vi bruker delvis integrasjon med $u(x) = 1 - x$ og $v'(x) = e^x$. Det gir $u'(x) = -1$ og vi kan ta $v(x) = e^x$, og vi får

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-x)e^x\, dx &= \left[(1-x)e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (-1)e^x\, dx \\ &= \left[(1-x)e^x\right]_{-1}^{1} + \left[e^x\right]_{-1}^{1} = \left[(1-x)e^x + e^x\right]_{-1}^{1} \\ &= (e^1) - (2e^{-1} + e^{-1}) = \underline{e - \frac{3}{e}}\end{aligned}$$

Vi kan også bruke delvis integrasjon for å finne en antiderivert først, så slipper vi å dra med oss grensene hele veien. En alternativ utregning er å skrive $\int_{-1}^{1}(1-x)e^x\, dx = \int_{-1}^{1} e^x\, dx - \int_{-1}^{1} xe^x\, dx$ og bruke delvis integrasjon på det siste integralet.

Oppgave 2 $f(x) = x^3 + 2x - 1$

a) f er en kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$, $f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = 2 > 0$, så skjæringssetningen sier at det finnes minst et nullpunkt (minst et punkt $c \in (0, 1)$ slik at $f(c) = 0$). $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, så f er strengt voksende. Dermed kan ikke funksjonen ta samme verdi (i dette tilfellet null) to forskjellige steder, så vi kan ha høyst et nullpunkt. Dermed har vi nøyaktig ett nullpunkt.

b) Newtons metode består i å velge et startpunkt, finne tangenten til kurven for dette punktet og finne ut hvor denne tangenten krysser x-aksen. Dette gir et nytt punkt som vi kan gjenta prosessen på. Vi får dermed en følge av punkt $x_0, x_1, x_2, \ldots$ der

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Med $x_0 = 1/2$ får vi

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 + 2x_n - 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 2$	x_{n+1}
0	1/2	1/8	11/4	$10/22 \approx 0{,}4545$
1	5/11	$4/1331 \approx 0{,}003005$	$317/121 \approx 2{,}6198$	$1581/3487 \approx 0{,}4534$

Vi ser at allerede $x_1 \approx 0{,}4545$ og $x_2 \approx 0{,}4534$ har de to første desimalene felles, så vi kan stoppe her og gi $x = 0{,}45$ som en tilnærming til nullpunktet.

Det er selvfølgelig også helt greit å bruke rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 1}{3x_n^2 + 2}$$

og regne ut x_1 og x_2 direkte fra denne.

Oppgave 3 Det mangler 50 liter før tanken er full, det renner lake inn med en hastighet på 3 liter per minutt samtidig som det renner lake ut med en hastighet på 2 liter per minutt. Dermed er tanken full etter 50 minutter.

For å finne mengden salt etter 50 minutter, $s(50)$, løser vi initialverdiproblemet. Først setter vi ligningen på standard form

$$s' + \frac{2}{200+t}s = 600$$

$2\ln(200+t)$ er en antiderivert til $2/(200+t)$, så vi multipliserer hver side av ligningen med $e^{2\ln(200+t)} = (200+t)^2$ og får

$$\begin{aligned}
(200+t)^2 s' + 2(200+t)s &= 600(200+t)^2 \\
((200+t)^2 s)' &= 600(200+t)^2 \\
(200+t)^2 s &= \int 600(200+t)^2\,dt = 200(200+t)^3 + C \\
s &= 200(200+t) + \frac{C}{(200+t)^2}
\end{aligned}$$

Ved tiden $t = 0$ har vi 200 liter med en konsentrasjon på 100 gram salt per liter, totalt 20 000 gram salt. Setter vi dette inn i løsningen vi nettopp fikk får vi

$$\begin{aligned}
s(0) &= 200 \cdot 200 + \frac{C}{200^2} = 20000 \\
C &= -8 \cdot 10^8 \\
s(t) &= 200(200+t) - \frac{8 \cdot 10^8}{(200+t)^2} \\
s(50) &= 400 \cdot 250 - \frac{8 \cdot 10^8}{250^2} = 100(20 \cdot 25 - 8 \cdot 2^4) = 37200
\end{aligned}$$

Det er altså 37200 gram (37,2 kg) salt i tanken i det øyeblikket den blir full.

Oppgave 4: a) $f(x) = \ln(1-x)$ så

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-1} \\ f''(x) &= -(1-x)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= -2(1-x)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -2\cdot 3(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

Det kan se ut som $f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}$ for $n \geq 1$. Vi kan vise dette ved induksjon.

Grunnsteget, at påstanden er sann for $n = 1$, er allerede vist.

Induksjonssteget: Anta at påstanden er sann for et tall $n = k$. Vi må vise at denne antagelsen medfører at påstanden i såfall også må være sann for $n = k+1$.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' = (-(k-1)!(1-x)^{-k})' \\ &= -(k-1)!(-k)(1-x)^{-k-1}(-1) \\ &= -((k+1)-1)!(1-x)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

som var det vi måtte vise. (Vi brukte antagelsen i den andre likheten). Dermed sier induksjonsprinsippet at påstanden er sann for alle heltall $n \geq 1$.

Setter vi inn $x = 0$ i $f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}$ får vi

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)! \text{ for } n \geq 1 \text{ og } f(0) = 0.$$

Dermed får vi Taylorrekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n$$

Her er et alternativ der vi slipper induksjon: Vi vet at $-\ln(1-x)$ er en antiderivert til $1/(1-x)$. Vi vet også (geometrisk rekke) at

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dermed får vi

$$\ln(1-x) + C_1 = -\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C_2$$

eller

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

Hvis vi setter inn $x = 0$ i ligningen over ser vi at vi må ha $C = 0$, så

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n$$

b) Hvis vi sammenligner rekken med den geometriske rekken $\sum x^n$ ser vi at rekken hvertfall konvergerer for $-1 < x < 1$. Når $x = 1$ har vi minus den harmoniske rekken $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$, som vi vet divergerer. Dermed kan vi ikke ha en større konvergensradius enn 1. Når $x = -1$ får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ der leddene går mot null og avtar i tallverdi. Dermed sier den alternerende rekketesten at vi har konvergens. Altså konvergerer rekken for $-1 \leq x < 1$ og divergerer for alle andre x.

Alternativt kan vi for eksempel bruke forholdstesten til å teste for absolutt konvergens, og deretter sjekke i endepunktene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{-1}{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{-1}{n}x^n\right|} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x| = |x|.$$

Dermed vet vi at rekka konvergerer absolutt for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. Endepunktene sjekker vi som vi gjorde over.

Oppgave 5 For x mellom 1 og $e^{\pi/c}$ får vi at $c \ln x$ er mellom 0 og π, så uttrykket inni rottegnet er positivt, så y er veldefinert og positiv. Roter B_c om x-aksen og del rotasjonslegemet opp i skiver med tykkelse Δx som står normalt på x-aksen. Disse skivene vil omtrent være sylinderformede, med radius y og høyde Δx. Volumet av skivene vil dermed være omtrent $\pi y^2 \Delta x$. Legger vi sammen disse omtrentlige verdiene av skivene og tar grensen får vi at volumet V_c til omdreiningslegemet vil være

$$V_c \quad = \quad \int_1^{e^{\pi/c}} \pi y^2\, dx = \int_1^{e^{\pi/c}} \pi \frac{\ln x}{x} \sin(c \ln x)\, dx$$

Hvis vi gjør subsitusjonen $u = c \ln x$ får vi

$$V_c \quad = \quad \int_0^{\pi} \pi \frac{u}{c^2} \sin u\, du$$

Ved delvis integrasjon får vi

$$\int u \sin u \, du = u(-\cos u) - \int 1 \cdot (-\cos u)\, du = -u\cos u + \sin u$$

så vi får

$$V_c = \left[\frac{\pi}{c^2}(-u\cos u + \sin u)\right]_n^{\pi} = \frac{\pi^2}{c^2}.$$

For at volumet skal bli $\pi^2/2$ må vi dermed ha $\underline{c = \sqrt{2}.}$

Oppgave 6 Vi ser på stokken som er tegnet inn på figuren. Hvis vi lar lengden i gangen være g og lengden i rommet være r får vi

$$\frac{1}{g} = \sin\theta \qquad \text{og} \qquad \frac{8}{r} = \cos\theta$$

Dermed er lengden av den lengste stokken som kan stå med vinkel θ

$$l(\theta) = r(\theta) + g(\theta) = \frac{8}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

En stokk som skal bæres inn i rommet må få plass hele veien rundt, så den kan ikke være lenger enn minimumsverdien for $l(\theta)$ for θ mellom 0 og $\pi/2$. For å finne denne verdien deriverer vi l og setter den deriverte lik null:

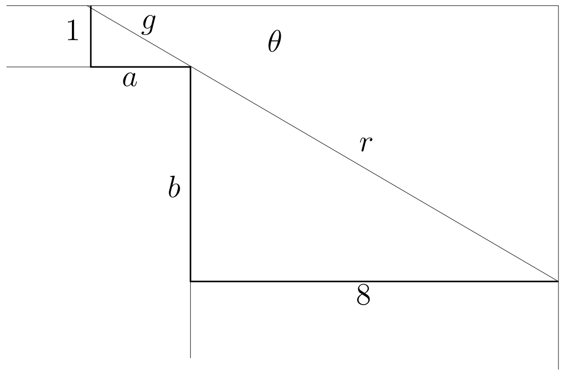
$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\theta} &= -8(-\sin\theta)(cos\theta)^{-2} - \cos\theta(\sin\theta)^{-2} = 0 \\ (\cos\theta)^3 &= 8(\sin\theta)^3 \\ \tan\theta &= 1/2 \end{aligned}$$

Funksjonen $l(\theta)$ er deriverbar på $(0, \pi/2)$ og går mot uendelig i begge endepunktene, så vi har et minimum for vinkelen som gir $\tan\theta = 1/2$. Når $\tan\theta = 1/2$ har vi $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$ og $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$ (bruk Pytagoras), så vi får at stokken kan maksimalt være

$$\frac{8}{2/\sqrt{5}} + \frac{1}{1/\sqrt{5}} = \underline{5\sqrt{5}}.$$

Vi kan også løse denne oppgaven uten å bruke vinkelen θ. La g og r være som før, mens kortsidene i trekantene er a og b i henholdsvis gangen og rommet (se figuren). Da har vi, fordi trekantene er formlike, at $1/a = b/8$ og Pytagoras gir oss

$$g^2 = 1^2 + a^2 \qquad \text{og} \qquad r^2 = b^2 + 8^2.$$



Den maksimale lengden i en slik posisjon er da ($b = 8/a$)

$$l = g + r = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{b^2+8^2} = \sqrt{1+a^2} + 8\sqrt{1+a^{-2}}.$$

For å finne den posisjonen der det er minst plass til stokken deriverer vi l med hensyn på a og setter denne lik null:

$$\begin{aligned}
l'(a) &= \frac{2a}{2\sqrt{1+a^2}} + 8\frac{-2a^{-3}}{2\sqrt{1+a^{-2}}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + 8\frac{-a\cdot a^{-3}}{\sqrt{a^2}\sqrt{1+a^{-2}}} = \frac{a-8a^{-2}}{\sqrt{1+a^2}} = 0 \\
a - 8a^{-2} &= 0 \\
a^3 - 8 &= 0 \\
a^3 &= 8 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Vi ser at $l'(a) < 0$ for $a \in (0,2)$ og at $l'(a) > 0$ for $a > 2$. Det følget at $l(2)$ er minimumsverdien for $l(a)$ for $a > 0$. Dermed er posisjonen der det er minst plass til en stokk den som svarer til $a = 2$, så stokken kan ha lengde høyst

$$l(2) = \underline{5\sqrt{5}.}$$

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (73 55 02 28)

KONTINUASJONSEKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Tirsdag 4. august 2009
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 25. august 2009

Hjelpemidler (Kode C): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 For hvilke x konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(7x)^n$?

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(7x)^n$ er en geometrisk rekke, så den er konvergent hvis og bare hvis $|7x| < 1$. Dvs. hvis og bare hvis $-1/7 < x < 1/7$.

Oppgave 2 Finn tredjegrads Taylorpolynomet om $x = 1$ til $f(x) = \ln(x^2)$.

Vi har $f(x) = \ln(x^2)$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, $f''(x) = \frac{-2}{x^2}$ og $f^{(3)}(x) = \frac{4}{x^3}$, så Taylorpolynomet om $x = 1$ til $f(x) = \ln(x^2)$ er $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 = 0 + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$.

Oppgave 3 Vis at punktet $(1, 2)$ ligger på kurven

$$xy^3 - x^3y = 6.$$

Finn deretter likningen for tangenten til kurven i dette punktet.

Hvis $(x, y) = (1, 2)$ da er $xy^3 - x^3y = 2^3 - 2 = 6$, så punktet $(1, 2)$ ligger på kurven $xy^3 - x^3y = 6$. Ved implisitt derivasjon får vi $y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} - 3x^2y - x^3\frac{dy}{dx} = 0$ hvorav følger at $y^3 - 3x^2y = (x^3 - 3xy^2)\frac{dy}{dx}$ og dermed at $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2}$.

Det følger at stigningstallet til tangenten til kurven i punktet $(1,2)$ er $\frac{2^3-6}{1-12} = \frac{-2}{11}$, og dermed at likningen for tangenten til kurven i dette punktet er $y - 2 = \frac{-2}{11}(x-1)$ eller $y = \frac{-2}{11}x + \frac{24}{11}$.

Oppgave 4 Bestem c slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & x \neq 0, \\ c & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi har $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3$ og at $f(0) = c$, så f er kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $c = 3$.

Oppgave 5 En bil bruker $3,6 + 0,001v^2$ liter bensin per time når den kjører med en hastighet på v kilometer i timen. Ved hvilken hastighet bruker bilen minst bensin per kilometer, og hva er forbruket da?

Vi antar at $v > 0$ (hvis $v = 0$ kjører bilen ikke og det gir derfor ikke mening å snakke om bilens forbruk av bensin per kilometer). Vi har da at bilens forbruk av bensin per kilometer er $f(v) = 3,6v^{-1} + 0,001v$. Vi skal altså finne minimum for dette uttrykket. Vi begynner med å derivere og får $f'(v) = -3,6v^{-2} + 0,001$. Vi har derfor at $f'(v) = 0$ hvis og bare hvis $v = 60$. Vi ser at $f'(v) < 0$ for $0 < v < 60$ og at $f'(v) > 0$ for $v > 60$. Funksjonen $f(v)$ har altså minimum for $v = 60$. Dvs. bilen bruker minst bensin per kilometer når hastigheten er 60 kilometer i timen, og forbruket er da $3,6 + 0,001(60)^2 = 7,2$ liter per time eller $7,2/60 = 0,12$ liter per kilometer.

Oppgave 6 Estimer integralet $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ med en feil mindre enn $0,02$.

Vi benytter trapesmetoden. La $f(x) = \sin(x^2)$. Hvis vi inndeler intervallet $[0,1]$ i n deler, er feilen ved trapesmetoden mindre enn $\frac{M}{12n^2}$ hvis $M > |f''(x)|$ for alle $x \in [0,1]$. Vi har at $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ og at $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$. Vi har altså at $|f''(x)| < 6$ for alle $x \in [0,1]$, så hvis vi deler intervallet $[0,1]$ i 5 deler er feilen ved trapesmetoden mindre enn $0,02$. Trapesmetoden gir oss da at integralet $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ tilnærmelsesvis, med en feil mindre enn 0,02, er lik $\frac{1}{10}(\sin(0)+2\sin((1/5)^2)+2\sin((2/5)^2)+2\sin((3/5)^2)+2\sin((4/5)^2)+\sin(1)) = 0,314$.

Oppgave 7 Finn tyngdepunktet til området avgrenset av x-aksen, kurven $y = x\sin(\frac{x}{2})$ og linjene $x = -\pi$ og $x = \pi$.

Tyngdepunktet til området er gitt ved $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M})$ hvor

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{y}\ dm = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}x\sin(\frac{x}{2})x\sin(\frac{x}{2})\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin^2(\frac{x}{2})\ dx = \int_0^{\pi} x^2\sin^2(\frac{x}{2})\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos x)\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} + \pi, \end{aligned}$$

$$M_y = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}\ dm = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(\frac{x}{2})\ dx = 0$$

og

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} dm = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(\frac{x}{2})\ dx = 2\int_0^{\pi} x\sin(\frac{x}{2})\ dx = 2\Big[-2x\cos(\frac{x}{2}) + 4\sin(\frac{x}{2})\Big]_0^{\pi} = 8.$$

Dvs. tyngdepunktet til området er $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}) = (0, \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8})$.

Oppgave 8 Vis at $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n}$ er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Vi har at $\left|\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{n!2^n}{x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{2(n+1)} \to 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så det følger av forholdstesten at potensrekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n}$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$. Funksjonen $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n}$ er derfor uendelig mange ganger deriverbar på $\mathbb{R}$. Vi har dessuten at $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}x^{2n-1}$ og at $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n}$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed at

$$\begin{aligned} f''(x) + xf'(x) + f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n} + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n} \\ &= -1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\right)x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(-2n-1+2n+1)\right)x^{2n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da vi også har at $f(0) = 1$ og at $f'(0) = 0$ følger det at funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n}$ er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

TMA4100 Matematikk 1
Eksamen desember 2009

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi har at $\lim_{x\to 1}(1-\cos(1-x^2)) = \lim_{x\to 1}(x^2-2x+1) = \lim_{x\to 1}(-2x\sin(1-x^2)) = \lim_{x\to 1}(2x-2) = 0$, at $1-\cos(1-x^2)$, x^2-2x+1, $-2x\sin(1-x^2)$ og $2x-2$ er deriverbare funksjoner, at $\frac{d}{dx}(1-\cos(1-x^2)) = -2x\sin(1-x^2)$, $\frac{d}{dx}(x^2-2x+1) = 2x-2$, $\frac{d}{dx}(-2x\sin(1-x^2)) = -2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)$ og $\frac{d}{dx}(2x-2) = 2$, og at $\lim_{x\to 1}\frac{-2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)}{2} = 2$. Det følger derfor ved 2 anvendelser av L'Hopitals regel at

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(1-x^2)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{-2x\sin(1-x^2)}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{-2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)}{2} = 2.$$

$\boxed{2}$ Vi anvender delbrøkoppspalting: Vi har at

$$\begin{aligned}\frac{x-7}{x^2+x-6} &= \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}\\ &= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{x^2+x-6}\\ &\iff A+B=1 \text{ and } 3A-2B=-7\\ &\iff B=1-A \text{ and } 3A-2(1-A)=-7\\ &\iff B=1-A \text{ and } 5A=-5 \iff A=-1 \text{ and } B=2.\end{aligned}$$

Det følger at

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = 2\int\frac{1}{x+3}\,dx - \int\frac{1}{x-2}\,dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + C.$$

Innsetting av grensene gir

$$\int_0^1 \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = [2\ln|x+3|-\ln|x-2|]_0^1 = (2\ln 4 - \ln 1) - (2\ln 3 - \ln 2) = \underline{\underline{2(\ln 4-\ln 3)+\ln 2}}.$$

(Merk også at $\ln 4 = \ln(2\cdot 2) = \ln 2 + \ln 2$, så svaret kan også skrives som $5\ln 2 - 2\ln 3$)

$\boxed{3}$ For hvert naturlig tall n la $a_n = \left|\frac{(x+1)^n}{n2^n}\right|$. Da har vi at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}|x+1| = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x+1| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}|x+1|.$$

Det følger derfor av forholdstesten at potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergerer absolutt for $\frac{1}{2}|x+1| < 1$ og ikke konvergerer absolutt for $\frac{1}{2}|x+1| > 1$. Følgelig er potensrekken

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergent for $x \in (-3, 1)$, og divergent for $x \in (\infty, -3)$ og for $x \in (1, \infty)$.

For $x = -3$ har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er konvergent.

For $x = 1$ har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent.

Altså er potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergent for $x \in [-3, 1)$ og divergent for alle andre verdier av x.

$\boxed{4}$ Funksjonen $f(x) = x^3 - 9x^2 + 33x + 45$ er deriverbar og $f'(x) = 3x^2 - 18x + 33 = 3(x-3)^2 + 6 > 0$ for alle x. Følgelig er f en voksende funksjon og har derfor en omvendtfunksjon $g(x)$.

Da $f(-1) = 2$ er $g(2) = -1$. Det følger at

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{54}.$$

$\boxed{5}$ Ifølge Eulers metode er $y(x_n) \approx y_n$ der x_n og y_n er definert rekursivt ved $x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0{,}1$ og $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0{,}1(e^{-y_n} - 1) = y_n + 0{,}1e^{-y_n} - 0{,}1$. Da $y(0) = 1$ la vi $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Da har vi at $x_1 = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$, $y_1 = 1 + 0{,}1e^{-1} - 0{,}1 = \frac{9+e^{-1}}{10}$, $x_2 = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$ og at $y_2 = \frac{9+e^{-1}}{10} + 0{,}1e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}} - 0{,}1 = \frac{8+e^{-1}+e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}}}{10}$.
Altså er

$$y_2 = \frac{8 + e^{-1} + e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}}}{10} \approx 0{,}8759764012$$

en tilnærmet verdi for $y(0{,}2)$.

$\boxed{6}$ La y være en løsning til differensiallikningen

$$y' - \cos(x)y = \cos(x). \tag{1}$$

Differensiallikningen (1) er en lineær førsteordens differensiallikningen. Da $\int -\cos(x)\,dx = -\sin(x) + C$ multipliserer vi begge sider av (1) med $e^{-\sin(x)}$. Da får vi at

$$\cos(x)e^{-\sin(x)} = y'e^{-\sin(x)} - y\cos(x)e^{-\sin(x)} = \frac{d}{dx}\left(ye^{-\sin(x)}\right).$$

Følgelig er

$$ye^{-\sin(x)} = \int \cos(x)e^{-\sin(x)}\,dx = -e^{-\sin(x)} + C$$

og $y = -1 + Ce^{\sin(x)}$ der C er en konstant. Hvis $y(0) = 0$ er $0 = -1 + Ce^0 = -1 + C$. Dvs. $C = 1$. Altså er $y = e^{\sin(x)} - 1$ en løsning til initialverdiproblemet

$$y' - \cos(x)y = \cos(x), \quad y(0) = 0.$$

$\boxed{7}$ **a)** La V være volumet av vann i reservoaret når vannstanden i reservoaret er h. Vannets overflate er en sirkel med radius $\frac{5}{2}h$. Vi har derfor at

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}h\right)^2 h = \frac{25\pi}{12}h^3.$$

Ved implisitt derivasjon får vi at

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

Følgelig er

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\frac{dV}{dt}}{25\pi h^2} = \frac{8}{25\pi h^2}.$$

Dvs. at vannstaden i reservoaret synker med $\frac{8}{25\pi 8^2} = \frac{1}{200\pi}$ meter pr. minutt i det øyeblikket vannstanden er 8 meter.

b) Hvis vi deler vannreservoaret i infinitesimal små horisontale lag hver med dybde dy meter så vil volumet av det laget som ligger h meter over bunnen av vannreservoaret være lik $\pi(\frac{5}{2}h)^2dh$ kubikkmeter og det vil derfor kreves $9810(11 - h)\pi(\frac{5}{2}h)^2dh = 9810\frac{25\pi}{4}(11-h)h^2dh$ Joule av pumpe det laget opp i en høyde 1 meter over vannreservoarets overflate. Følgelig vil det kreves

$$\begin{aligned}\int_0^{10} 9810\frac{25\pi}{4}(11-h)h^2\,dh &= \frac{122625\pi}{2}\int_0^{10} 11h^2 - h^3\,dh \\ &= \frac{122625\pi}{2}\left[\frac{11}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4\right]_0^{10} \\ &= \frac{122625\pi}{2}\left(\frac{11}{3}10^3 - \frac{1}{4}10^4\right) \\ &= 71531250\pi \text{ Joule}\end{aligned}$$

å tømme vannreservoaret ved å pumpe all vannet opp i en høyde 1 meter over vannreservoarets overflate.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Lf kont 21.08.10

$\boxed{1}$ L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}2x\cos(x^2)}{\sin x}=\left(\lim_{x\to 0}e^{\sin(x^2)}2\cos(x^2)\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)=2$$

$\boxed{2}$ Skivemetoden gir volumet, med $r=1+y=1+x^3$:

$$V=\int_0^1(\pi r^2-\pi 1^2)\,dx=\int_0^1\pi[(1+x^3)^2-1]\,dx=\frac{9\pi}{14}$$

$\boxed{3}$

$$\int\frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(1-\frac{3x+2}{x^2+3x+2}\right)dx$$

Delbrøk:

$$\frac{3x+2}{x^2+3x+2}=\frac{3x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{4}{x+2}$$

gir svaret

$$\int\frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+2}\right)dx=x+\ln|x+1|-4\ln|x+2|+C$$

$\boxed{4}$ Implisitt derivasjon:

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0\implies\frac{dy}{dx}=\frac{9y-3x^2}{3y^2-9x}$$

I punktet $(2,4)$: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{5}$, som gir tangentlinjen

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$$

$\boxed{5}$ $f(x)=x^6+7x^2-4$ har $f(0)=-4<0$ og $f(1)=4>0$, så skjæringssetningen garanterer et nullpunkt i $(0,1)$. Newtons metode

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^6+7x_n^2-4}{6x_n^5+14x_n}$$

med $x_0=0{,}5$ gir $x_1=0{,}810869$, $x_2=0{,}744961$, $x_3=0{,}740243$, $x_4=0{,}740221$ så $x\approx 0{,}74$.

$\boxed{6}$ Rottest gir absolutt konvergens for $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{nx}{1+n}\right| < 1$, dvs. $|x| < 1$. Sjekker endepunktene:

$$x = \pm 1: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$$

Divergerer fordi leddene i rekken ikke konvergerer mot null:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^{n+1} = e^{-1}$$

(se Rottmann side 80, punkt 1b)

Potensrekken konvergerer altså hvis og bare hvis $|x| < 1$.

$\boxed{7}$

$$I = \int_0^1 \cos(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 t^{4n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} = 1-\frac{1}{2!5}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{6!13}+\frac{1}{8!17}-+\cdots$$

Dette er en alternerende rekke med ledd som i absoluttverdi avtar i størrelse. Restleddsestimatet for slike rekker garanterer at feilen ved å kappe av rekken etter n ledd er mindre enn absoluttverdien av neste ledd. Første ledd som har absoluttverdi mindre enn $2\cdot 10^{-6}$ er $1/8!17$, så vi har

$$I \approx 1-\frac{1}{2!5}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{6!13} \approx 0{,}90452279$$

med avvik mindre enn $2\cdot 10^{-6}$.

$\boxed{8}$ Sett $t = 0$ idet vi begynner å pumpe inn vann. Vannvolumet ved tiden t (minutter) er da $V = 100 + t$ (liter). La $y = y(t)$ være den totale mengden salt (i gram) ved tiden t. Vi setter opp diff.lign.

$$y'(t) = (\text{inn})-(\text{ut}) = (2\text{ l/min})\cdot(0\text{ g/l}) - (1\text{ l/min})\cdot\left(\frac{y}{V}\text{ g/l}\right)$$

$$y' = -\frac{y}{V} = -\frac{y}{100+t}, \qquad y(0) = 10\cdot 100$$

som har løsning $y(t) = \dfrac{10^5}{100+t}$. Finner når saltkonsentrasjonen er nede i 5 gram pr. liter:

$$\frac{y}{V} = \frac{10^5}{(100+t)^2} = 5$$

som gir $t = \sqrt{\dfrac{10^5}{5}} - 100 = 100(\sqrt{2}-1) \approx 41{,}42$ minutter

TMA4100 Matematikk 1
Eksamen 14.12.2010

Løsningsforslag

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ Funksjonen f er kontinuerlig i 0 hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke avhenger av f sin verdi i 0 følger det at f er kontinuerlig i 0 hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)}-1}{x} = 0$. Da

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin(2x)} - 1 = 0 = \lim_{x\to 0} x$$

og

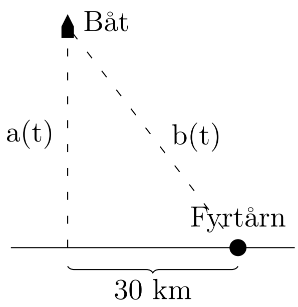
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^{\sin(2x)} - 1)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0} 2\cos(2x)e^{\sin(2x)} = 2$$

følger det av L'Hopitals regel at $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)}-1}{x} = 2$. Funksjonen f er derfor ikke kontinuerlig i 0.

$\boxed{2}$ Da f er kontinuerlig, $f(-2) = f(2) = 3 - \ln 5 > 0$ og $f(0) = -1 < 0$ følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(-2, 0)$ og et nullpunkt i intervallet $(0, 2)$.

Da $f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^3}{x^2+1}$ er negativ når $x < 0$ og positiv når $x > 0$, er f avtagende på intervallet $(-\infty, 0)$ og voksende på intervallet $(0, \infty)$. Det følger at f ikke kan ha flere enn de 2 nullpunktene vi fant ovenfor. (Alternativt kan man bruke middelverdisetningen til å vise at f ikke kan ha flere enn 2 nullpunkter: Anta at f har 3 forskjellige nullpunkter. Da følger det av middelverdisetningen at f' har 2 nullpunkter, men $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$ har bare et nullpunkt. Altså må vår antagelse om at f har 3 nullpunkter være feil, og f kan derfor høyest ha de 2 nullpunktene vi fant ovenfor.)

Altså har f 2 nullpunkter.



$\boxed{3}$ La $a(t)$ være strekningen målt i km båten har tilbakelagt til tiden t, og la $b(t)$ være avstanden målt i km mellom båten og fyrtårnet til tiden t (se figuren).

Da er

$$(*) \qquad (b(t))^2 = (a(t))^2 + 30^2.$$

Ved implisitt derivasjon får vi at

$$2b(t)b'(t) = 2a(t)a'(t).$$

Det følger at

$$a'(t) = b'(t)\frac{b(t)}{a(t)}.$$

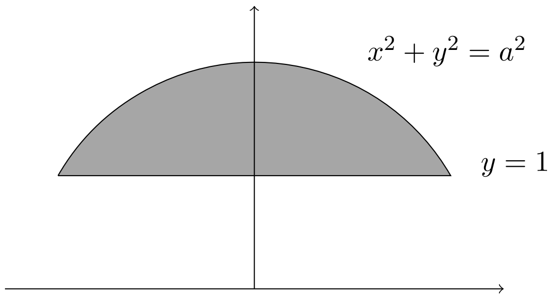
Når $b(t) = 50$ følger det av $(*)$ at $a(t) = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$. Følgelig er

$$a'(t) = 3 \text{ m/s } \frac{50}{40} = \frac{15}{4} \text{ m/s} = \frac{15}{4} \, 3{,}6 \text{ km/t} = 13{,}5 \text{ km/t}$$

når $b(t) = 50$ og $b'(t) = 3$ m/s.

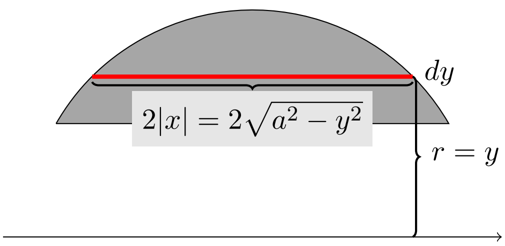
Altså kjører båten med en hastighet på 13,5 km/t på det tidspunktet hvor båten er 50 km fra fyrtårnet og avstanden mellom båten og fyrtårnet øker med 3 meter per sekund.

$\boxed{4}$ La O være området begrenset av kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $y = 1$ (se Figur 1).



Figur 1: Området O

Den gjenværende delen av kulen er det legemet som fremkommer når området O roteres om x-aksen. (En kan naturligvis også frembringe den gjenværende delen av kulen ved å rotere området begrenset av kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $x = 1$ om y-aksen. Gjør en det, må en bytte rundt på x og y i utregninger nedenfor.)



Figur 2: Sylinderskallmetoden

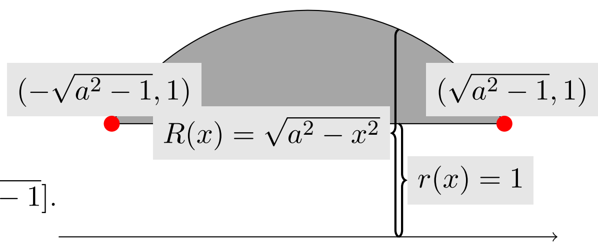
Vi bruker sylinderskallmetoden til å regne volumet ut og deler området O i infinitesimale horisontale striper. Hvis punktet (x, y) tilhører området O vil $y \in [1, a]$. For $y \in [1, a]$ vil stripen i y ha areal $dA = 2|x| \; dy = 2\sqrt{a^2 - y^2} \; dy$ og avstand $r = y$ til x-aksen. Volumet av den gjenværende delen av kula er følgelig

$$\int_1^a 2\pi r \; dA = \int_1^a 4\pi y \sqrt{a^2 - y^2} \; dy = 4\pi \int_1^a (a^2 y^2 - y^4)^{1/2} \; dy$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{3/2} \right]_1^a = \frac{4\pi}{3}(a^2 - 1)^{3/2}.$$

(Det er òg mulig å bruke "the washer method": Da kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $y = 1$ skjærer hver andre i $(-\sqrt{a^2 - 1}, 1)$ og i $(\sqrt{a^2 - 1}, 1)$ integrerer vi over intervallet $[-\sqrt{a^2 - 1}, \sqrt{a^2 - 1}]$.

Den indre radien er $r(x) = 1$ og den ytre radien er $R(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.



Figur 3: "The washer method"

Følgelig er volumet av den gjenværende delen av kula

$$\begin{aligned}
\pi \int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}} \left((R(x))^2 - (r(x))^2\right)\, dx &= \pi \int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}} (a^2 - x^2 - 1)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{a^2-1}} (a^2 - x^2 - 1)\, dx \\
&= 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{\sqrt{a^2-1}} \\
&= 2\pi \left(a^2\sqrt{a^2-1} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3 - \sqrt{a^2-1}\right) \\
&= 2\pi \left((a^2-1)\sqrt{a^2-1} - \frac{1}{3}(a^2-1)^{3/2}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}(a^2-1)^{3/2}.
\end{aligned}$$

(Vi har ved det annet likhetstegnet brukt at funksjonen $a^2 - x^2 - 1$ er jevn.))

$\boxed{5}$ Vi bruker delbrøkoppløsning:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+2x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x^3+4x} \\
&\iff A+B=3 \text{ og } 4A=4 \text{ og } C=2 \\
&\iff A=1 \text{ og } B=C=2.
\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+2x+4}{x^3+4x}\, dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+4}\, dx \\
&= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + \int \frac{2}{x^2+4}\, dx \\
&= \ln|x| + \ln(x^2+4) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

(Vi har brukt substitusjonen $u = x^2+4$, $du = 2x\, dx$ til å regne ut integralet $\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx$, og substitusjonen $v = \frac{x}{2}$, $dv = \frac{1}{2}\, dx$ samt formel 22) på side 135 i Rottmann til å regne ut integralet $\int \frac{2}{x^2+4}\, dx$).

$\boxed{6}$ Differensialligningen $y' + \tanh(x)y = x$ er en første ordens lineær differensialligning. Ifølge formel 164) på side 147 i Rotmann er $\int \tanh(x)\, dx = \ln(\cosh(x)) + C$. Vi bruker derfor $e^{\ln(\cosh(x))} = \cosh(x)$ som integrasjonsfaktor:

$$x\cosh(x) = y'\cosh(x) + y\tanh(x)\cosh(x) = y'\cosh(x) + y\sinh(x) = \frac{d}{dx}(y\cosh(x)).$$

Følgelig er

$$y\cosh(x) = \int x\cosh(x)\ dx = -\cosh(x) + x\sinh(x) + C.$$

(Her har vi brukt formel 176) på side 148 i Rottmann.)

Vi innsetter initialbetingelsen $y(0) = -1$ og får da at $-1 = -1 + C$. Så $C = 0$ og $y\cosh(x) = -\cosh(x) + x\sinh(x)$.

Det følger at løsningen til initialverdiproblemet er $y = -1 + x\tanh(x)$.

$\boxed{7}$ Ifølge Rottmann side 122 er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ for alle x. Følgelig er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{n!} = e^{t^3}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{n!} = te^{t^3}$ for alle t og

$$\int_0^x te^{t^3}\ dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{n!}\ dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+2}}{(3n+2)n!}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$$

for alle x.

Altså konvergerer potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ for alle x og summen blir $\int_0^x te^{t^3}\ dt$.

(Det er mulig å vise at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ konvergerer for alle x uten å finne summen ved for eksempel å bruke forholdstesten: For alle x har vi at

$$\left|\frac{\frac{x^{3(n+1)+2}}{(3(n+1)+2)(n+1)!}}{\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}}\right| = \frac{3n+2}{(3n+5)(n+1)}|x|^3 = \frac{3/n + 2/n^2}{3 + 8/n + 5/n^2}|x|^3 \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

Det følger derfor av forholdstesten at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ konvergerer absolutt, og dermed konvergerer, for alle x.)

$\boxed{8}$ Det følger av analysens fundamentalsetning at $f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Følgelig er $f''(x) = \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Det følger av Taylors formel at hvis $T_1(x)$ er Taylorpolynomet av første grad om 1 til f så er

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2$$

for en c mellom 1 og x.

Hvis $0{,}9 < x < 1{,}1$ og $0{,}9 < c < 1{,}1$ er

$$\left|\frac{f''(c)}{2}(x-1)^2\right| \le \frac{1{,}1\pi}{2}(0{,}1)^2 < 0{,}02.$$

Følgelig er $|f(x) - T_1(x)| < 0{,}02$ når $0{,}9 < x < 1{,}1$. Vi kan derfor bruke $T_1(x)$ som $p(x)$.

Da $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$ er $p(x) = T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1$.

Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4100 Matematikk 1

Oppgåve 1 La $g(x) = \arcsin(x)$ og $h(x) = \frac{x}{1+x}$. Merk at $f(x) = g\big(h(x)\big)$ slik at f er kontinuerleg på intervallet $[0, \infty)$. Dei deriverte av $g(x)$ og $h(x)$ er lik

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Ved å bruke kjederegelen får ein at

$$f'(x) = g'(u)\big|_{u=h(x)} h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x}{(1+x)^2}}}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

Ein kan sjå at for $x > 0$ er $f'(x) > 0$ og det følgjer at f er ein veksande funksjon.
Siden f er sterkt veksande for $0 \leq x < \infty$ følgjer at f kan ha ekstremalpunkt i dei to endepunkta. Når $x = 0$ er $f(0) = 0$ eit ekstremalpunkt. Når $x \to \infty$ så vil $f(x) \to \infty$ så $x = 0$ er det einaste ekstremalpunktet for f på intervallet $0 \leq x < \infty$.

Oppgåve 2 Høgda på rektangelet er lik $h = (1-x)\tan 30 = (1-x)\frac{1}{\sqrt{3}}$. Arealet av rektangelet kan skildrast ved uttrykket

$$A(x) = \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}}.$$

Den deriverte av $A(x)$ er lik

$$A'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{3}},$$

og $A'(x) = 0$ dersom $x = \frac{1}{2}$. Moglege ekstremalpunkt til A er $x = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ og ein kan sjå at det største moglege arealet på rektangelet er $A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Oppgåve 3 Ved å derivere $f(x)$ får ein

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}.$$

Ein kan sjå at $\lim_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$, medan $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ikkje eksisterer. Det følgjer at $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ikkje eksisterer.

Definisjonen av den deriverte gir at

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Det følgjer at f er deriverbar i $x = 0$.

Oppgåve 4 Vi finn tyngdepunktet til området ved å bruke vertikale remser. Tyngdepunktet til ei typisk vertikal remse kan skildrast som

$$\begin{aligned}
&\text{massesentrum}: \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, \frac{x^2+1}{2}) \\
&\text{lengd}: \quad x^2+1 \\
&\text{bredde}: \quad dx \\
&\text{areal}: \quad dA = (x^2+1)\,dx \\
&\text{masse}: \quad dm = dA
\end{aligned}$$

Momentet om x-aksen av den vertikale remsa er $\tilde{y}\,dm = \frac{x^2+1}{2}\,dA = \frac{(x^2+1)^2}{2}\,dx$. Følgjeleg

$$M_x = \int_{-1}^{1}\tilde{y}\,dm = \int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)^2}{2}\,dx = \frac{28}{15}.$$

Massen av området er

$$M = \int_{-1}^{1} dm = \int_{-1}^{1} x^2+1\,dx = \frac{8}{3},$$

så $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{7}{10}$. Fordelinga av området er symmetrisk om y-aksen så $\bar{x} = 0$. Tyngdepunktet til området er difor $(0, \frac{7}{10})$.

Oppgåve 5 Likninga skildrar ei separabel differensial-likning på forma

$$\frac{1}{k(a-y)(b-y)}\,dy = dt, \qquad y(0) = 0.$$

Ved å integrere på begge sider av likskapsteiknet får ein

$$\frac{1}{k}\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \int dt = t + C_1.$$

Delbrøksoppspalting gir $\frac{1}{(a-y)(b-y)} = \frac{1}{b-a}\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{b-y}$ og ved å integrere får ein

$$\frac{1}{k}\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \frac{1}{k}\int \frac{1}{b-a}\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{b-y}\,dy = \frac{1}{k}\frac{\ln(y-a)}{a-b} - \frac{1}{k}\frac{\ln(y-b)}{a-b} + C_2.$$

Ved å setje inn i likninga ovanfor og bruke reknereglar for logaritma får ein

$$\ln\frac{y-a}{y-b} = kt(a-b) + C.$$

Startverdien $y(0) = 0$ gir at $C = \ln\frac{a}{b}$. Ved å bruke eksponential-funksjonen får ein

$$\frac{y-a}{y-b} = e^{\ln\frac{a}{b}}e^{kt(a-b)} \Rightarrow y = \frac{a - ae^{kt(a-b)}}{\frac{a}{b}e^{kt(a-b)} - 1}.$$

Løysinga av initialverdi-problemet blir

$$y = \frac{a - ae^{kt(a-b)}}{\frac{a}{b}e^{kt(a-b)} - 1}.$$

Oppgåve 6 La $a_n = \frac{(-1)^n}{n!2^n}x^{2n}$, og la x vere eit vilkårleg tal. Sidan

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!2^n}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}x^2 = 0,$$

følgjer at potensrekkja er konvergent for alle x. Potensrekka til eksponential-funksjonen er gitt ved $e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$. La $u = -\frac{x^2}{2}$. Då får ein

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n}.$$

Oppgåve 7 Polynomet $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ er 2.ordens Taylor-polynom til funksjonen $\cos x$ i punktet $x = 0$. Taylors formel gir at feilen kan estimerast ved

$$|\cos x - P_2(x)| \le M\frac{|x|^3}{3!}$$

der M er ein positiv konstant slik at $|\cos^{(3)} x| \leq M$. Sidan $\cos^{(3)} x = \sin x$ kan ein velgje $M = 1$. Ein får at feilen mellom funksjonen $\cos x$ og tilnærminga $P_2(x)$ på intervallet $|x| < \frac{1}{2}$ er gitt ved

$$|\cos x - P_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!} \leq \frac{1}{2^3 3!}.$$

Alternativt kan ein bruke at

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x.$$

Rekka $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ er alternerande og oppfyller krava til Leibniz's setning. Feilestimat for alternerande rekker gir at for $x < \frac{1}{2}$

$$|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!})| \leq \frac{x^2}{4!} < \frac{1}{2^4 4!}.$$

Oppgåve 8 La $y^2 = x$. Ved å bruke kjederegelen får ein $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$. Ved å sette inn i initialverdi-problemet får ein

$$2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{y^2}{t} = y, \quad 0 < t < \infty, \quad y(1) = \sqrt{x(1)} = 2.$$

Sidan $x(t) > 0$ følgjer at $y(t) > 0$ så vi kan omskrive initialverdi-problemet til

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = \frac{1}{2}.$$

Multipliser likninga med den integrerande faktor $v(t) = e^{\int -t^{-1}\,dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$:

$$\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t^2} = \frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \frac{1}{2t}.$$

Ved å integrere får ein

$$\frac{y}{t} = \int \frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln t + C,$$

så $y(t) = t(\frac{1}{2}\ln t + C)$. Sidan $y(1) = 2$ får ein at $C = 2$ og $y(t) = t(\frac{1}{2}\ln t + 2)$. Følgjeleg er $x(t) = y(t)^2 = t^2(\frac{1}{2}\ln t + 2)^2$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Høst 2011

Løsningsforslag, eksamen
21/12-2011

1 Den første grenseverdien er en ubestemt form av typen "0/0", og L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{-2x}=\frac{\cos(\pi)}{-2\pi}=\underline{\underline{\frac{1}{2\pi}}}.$$

Den andre grenseverdien er av form "$\infty-\infty$". Vi omformer uttrykket ved å multiplisere med $x+\sqrt{x^2-x}$ i teller og nevner:

$$x-\sqrt{x^2-x}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-(1/x)}},$$

der vi i siste overgang delte på x i teller og nevner. Derfor er

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-(1/x)}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

2 Den deriverte er

$$f'(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi finner kritiske punkter ved å løse $f'(x)=0$, som gir $2=2x^2$, dvs. $x=\pm1$. Det eneste kritiske punktet i intervallet $[0,2]$ er altså $x=1$.

Vi setter opp en tabell over funksjonsverdiene i det kritiske punktet samt i intervallets endepunkter $x=0$ og $x=2$, og trekker ut laveste og høyeste verdi.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4/5

Svaret er altså: Maksimumsverdi er $f(1)=1$, minimumsverdi er $f(0)=0$.

3 Vi ser ved innsetting at ligningen er oppfylt for $(x,y)=(1,1)$, og dette punktet ligger derfor på kurven.

Implisitt derivasjon med hensyn på x gir (tenk på $y=y(x)$ som en funksjon av x og bruk kjerneregel)

$$y'(1-y^2)+y(-2yy')+\cos\left(\frac{2\pi x}{1+y^2}\right)\left(\frac{2\pi(1+y^2)-2\pi x(2yy')}{(1+y^2)^2}\right)=0$$

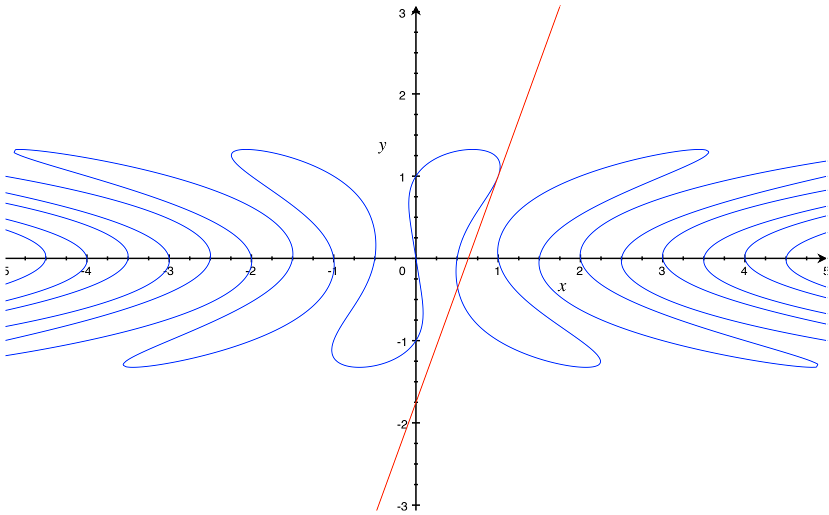
Innsatt $(x, y) = (1, 1)$:

$$-2y' + \cos(\pi)\left(\frac{4\pi - 4\pi y'}{4}\right) = -2y' - \pi + \pi y' = (\pi - 2)y' - \pi = 0 \qquad \Longrightarrow y' = \frac{\pi}{\pi - 2}$$

Stigningstallet til tangenten i $(1, 1)$ er altså $\frac{\pi}{\pi-2}$, og ligningen for tangenten er derfor

$$y - 1 = \frac{\pi}{\pi - 2}(x - 1), \qquad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi x - 2}{\pi - 2}}}.$$

For dem som måtte være nysgjerrige på hvordan dette ser ut, tar vi med et plot av kurven og tangentlinjen:



$\boxed{4}$ Sett $f(x) = \sin x + x - 1$, så ligningen som skal løses er $f(x) = 0$. Vi har $f(0) = -1 < 0 < f(1) = \sin 1$, så skjæringssetningen garanterer at ligningen har minst én løsning i intervallet $0 < x < 1$. At det ikke kan være to eller flere løsninger, kan vi slutte av at f er voksende i intervallet $0 < x < 1$, fordi $f'(x) = \cos x + 1 > 0$ der.

Vi setter opp Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n + x_n - 1}{\cos x_n + 1},$$

som med $x_0 = 0{,}5$ gir oss $x_1 = 0{,}5109579530$ og $x_2 = 0{,}5109734293$. Her har de fire første desimalene allerede stabilisert seg, og med tre desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0{,}511$ (korrekt avrundet).

$\boxed{5}$ Vi separerer (anta $y \neq 0$ og $y \neq 1$):

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int 2x\,dx = x^2 + C. \tag{1}$$

Delbrøkoppløsning gir

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} \qquad \Longrightarrow 1 = A(1-y) + By,$$

der den siste ligningen gjelder for alle y (i utgangspunktet var $y = 0$ og $y = 1$ utelukket, men pga. kontinuitet vil ligningen også holde for disse verdiene av y), og ved å sette $y = 0$ og $y = 1$ finner vi $A = B = 1$ og dermed

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \ln|y| - \ln|1-y| + C' = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| + C'.$$

Sett dette inn i (1) (vi kan ta $C' = 0$, siden vi allerede har en integrasjonskonstant C på høyresiden av (1)) og ta exp av begge sider:

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x^2+C} = e^C e^{x^2} \implies \frac{y}{1-y} = (\pm e^C)e^{x^2} = De^{x^2} \quad \left(D = \pm e^C\right)$$

$$\implies y\left(1 + De^{x^2}\right) = De^{x^2} \implies y = \frac{De^{x^2}}{1 + De^{x^2}}$$

Til slutt bruker vi initalbetingelsen $y(0) = 1/2$ til å finne D:

$$y(0) = \frac{D}{1+D} = \frac{1}{2} \implies 2D = 1 + D \implies D = 1.$$

Svaret er altså (som vi også kan sjekke ved innsetting)

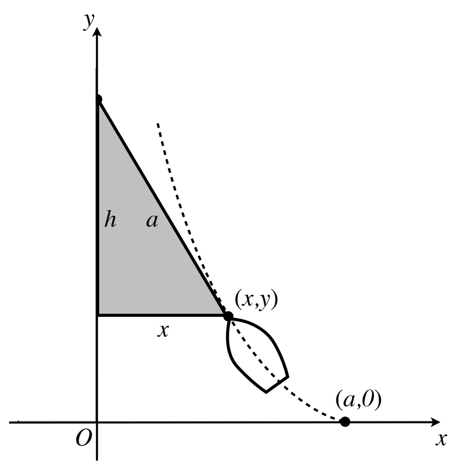
$$\underline{\underline{y = \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}}}.$$

$\boxed{6}$ Tangentens (tauets) stigningstall er y', og fra figuren under ser vi at

$$y' = \frac{-h}{x},$$

der h er høyden av den skraverte trekanten. Men $x^2 + h^2 = a^2$ gir $h = \sqrt{a^2 - x^2}$, så

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}. \tag{2}$$



Integrasjon av (2) gir

$$y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx. \tag{3}$$

Substitusjonen $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ gir

$$du = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{x}{u}\, dx \implies -u\, du = x\, dx$$

Vi ganger med x i teller og nevner inne i integralet i (3) for å få kombinasjonen $x\,dx$:

$$y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\, x\, dx = -\int \frac{u}{x^2}(-u)\, du = \int \frac{u^2}{a^2 - u^2}\, du,$$

der vi i siste overgang brukte at $u^2 = a^2 - x^2$ og derfor $x^2 = a^2 - u^2$. Nå skriver vi

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{u^2}{a^2 - u^2}\, du = \int \frac{(u^2 - a^2) + a^2}{a^2 - u^2}\, du = \int \left(-1 + \frac{a^2}{a^2 - u^2}\right) du \\ &= -u + \int \frac{a^2}{a^2 - u^2}\, du = -u + a^2 \frac{1}{a} \ln \frac{a + u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + C, \end{aligned}$$

der vi brukte integralet oppgitt i oppgaveteksten. Med $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ får vi

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C,$$

og vi finner til slutt C ved å bruke at $y(a) = 0$ (fra figuren):

$$y(a) = a \ln(1) + C = C = 0.$$

Svaret er altså

$$y = f(x) = \underline{\underline{-\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}}}.$$

$\boxed{7}$ **a)** Vi tar utgangspunkt i den gitte rekken

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad (|x| < 1). \tag{4}$$

Integrasjon av begge sider gir (vi bruker her et teorem som sier at en potensrekke kan integreres leddvis innenfor konvergensintervallet)

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int x^{2n}\, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + C_1 \tag{5}$$

for $|x| < 1$. På den annen side er

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C_2 \qquad (|x| < 1), \tag{6}$$

som vi ser enten ved integrasjon ved hjelp av delbrøk:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln(1 + x) - \ln(1 - x)\right) + C_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C_2,$$

eller fra derivasjonen

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Fra (5) og (6) har vi

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = C_3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = C_3 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

og integrasjonskonstanten C_3 bestemmer vi ved å sette inn $x = 0$, som gir $(1/2)\ln(1) = C_3$, dvs. $C_3 = 0$. Altså er

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \tag{7}$$

for $|x| < 1$, som var det vi skulle vise.

b) La $0 < x < 1$. Fra (7) har vi

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)}_{\text{kall dette uttrykket } \Delta_n} = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \cdots.$$

Høyresiden er positiv fordi $x > 0$, og derfor er også venstresiden Δ_n positiv, og vi kan vi sette den i absoluttverdi om vi vil. Vi faktoriserer ut $x^{2n+3}/(2n+3)$ på høyresiden:

$$\begin{aligned}\Delta_n = |\Delta_n| &= \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(1 + \frac{2n+3}{2n+5}x^2 + \frac{2n+3}{2n+7}x^4 + \cdots\right)\\ &< \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\\ &= \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(\frac{1}{1-x^2}\right),\end{aligned}$$

der vi brukte $2n+3 < 2n+5 < 2n+7 < \cdots$ for å få ulikheten, og rekken (4) for å få den siste likheten. Vi har dermed vist den ønskede ulikheten:

$$|\Delta_n| = \left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| < \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(\frac{1}{1-x^2}\right). \tag{8}$$

For å svare på det siste spørsmålet, finner vi først x ved å løse

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \implies 1 + x = 2 - 2x \implies 3x = 1 \implies x = \frac{1}{3}.$$

(8) gir da (multiplisere med 2 på hver side)

$$\begin{aligned}\left|\ln(2) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\right)\right| &< \left(\frac{2}{1-1/9}\right)\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\\ &= \frac{9}{4(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}.\end{aligned}$$

Vi regner ut høyresiden for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ og stopper når vi kommer under 10^{-5}:

n	$\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}$	$\frac{9}{4(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}$
0	$\frac{1}{3\cdot 3^3} = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{5\cdot 3^5} = \frac{1}{1215}$	$\frac{1}{540}$
2	$\frac{1}{7\cdot 3^7} = \frac{1}{15309}$	$\frac{1}{6804}$
3	$\frac{1}{9\cdot 3^9} = \frac{1}{177147}$	$\frac{1}{78732}$
4	$\frac{1}{11\cdot 3^{11}} = \frac{1}{1948617}$	$\frac{1}{866052} < 10^{-5}$

Vi konkluderer at

$$\underline{\underline{\ln(2) \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) = 0{,}6931460}}$$

med feil mindre enn 10^{-5}.

Alternativ løsning av første del av punkt (b): Vi tar utgangspunkt i den geometriske summeformelen (for $t^2 \neq 1$)

$$1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = \frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2} \implies \frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2},$$

og integrerer denne over $[0, x]$ for en gitt $0 < x < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \left(1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n}\right) dx + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt$$

dvs.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt,$$

og det siste integralet oppfyller

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt < \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n+2}\, dt = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

der vi brukte at $0 < t < x \implies \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$. Vi konkluderer at (8) holder.

Eksamen i TMA4100 Matematikk 1
21. desember 2012

Løsningsforslag

1

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

2 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1/n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$. Den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer (p-rekke med $p = 1$), mens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer (p-rekke med $p = 2$). Den gitte rekken er derfor *divergent* som en sum av en divergent og en konvergent rekke.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1/n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer ved Leibniz's kriterium (testen for alternerende rekker), og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer. Den gitte rekken er derfor *konvergent* som en sum av to konvergente rekker.
Den er imidlertid *ikke absolutt konvergent:* Vi har $|\frac{(-1)^n+1/n}{n}| > \frac{1-1/n}{n} > 0$ for $n \geq 2$. Siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-1/n}{n}$ består av positive ledd for $n \geq 2$, kan vi grensesammenligne den med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$, og siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-1/n}{n}$ divergent. Siden $|\frac{(-1)^n+1/n}{n}| > \frac{1-1/n}{n} > 0$ for $n \geq 2$, følger at $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n+1/n}{n}|$ er divergent, dvs., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1/n}{n}$ er ikke absolutt konvergent. Alternativt: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1/n}{n}$ hadde vært absolutt konvergent, ville rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^n+1/n}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right)$ vært absolutt konvergent (som en differanse mellom to absolutte konvergente rekker), noe som ikke er tilfelle. Ergo kan ikke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1/n}{n}$ være absolutt konvergent.

3 Hvis vi lar x være avstanden fra bunnen av stigen til veggen, og y avstanden fra toppen av stigen til underlaget, vil vi til enhver tid ha at $x^2 + y^2 = 5^2 = 25$. Implisitt derivasjon av denne ligningen mhp. t gir $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$, som gir $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$. På det aktuelle tidspunktet er $y = 4$, $x = \sqrt{25-4^2} = 3$ og $\frac{dx}{dt} = 0.1$. Innsatt i uttrykket for $\frac{dy}{dt}$ gir dette $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}\cdot 0.1 = -0.075$, dvs., toppen av stigen glir nedover veggen med en fart av $\boxed{0.075 \text{ m/s}}$.

4 **a)** Vi har $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-3}{2x_n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Med $x_0 = 2$ får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
x_n	2	1.75	1.73214	1.73205	1.73205

Vi ser at tredje desimal ikke endrer seg etter andre iterasjon, og dette tar vi som numerisk evidens for at $\sqrt{3} \approx 1.732$ med tre desimalers nøyaktighet.

b) Vi har $\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ og $\arctan 0 = 0$, så $\arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. For $|t| < 1$ har vi $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ (en geometrisk rekke med faktor $-t^2$), så for $|x| < 1$ kan den integreres leddvis fra 0 til x. Dette gir:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

c) Siden $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, kan rekkeutviklingen fra **b)** brukes til beregning av $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$$

$$\text{dvs.} \quad \pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{6}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$$

Dette er en alternerende rekke hvor absoluttverdien av leddene går monotont mot null, så feilestimatet for alternerende rekker kan brukes. Hvis vi setter $u_n = \frac{6}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$, har vi derfor at summen av de n første leddene vil gi verdien av π med en feil mindre enn $2 \cdot 10^{-3}$ dersom vi velger n så stor at $u_{n+1} = \frac{6}{3^{n+1}(2n+3)\sqrt{3}} < 2 \cdot 10^{-3}$. Med 1.732 i stedet for $\sqrt{3}$ i uttrykket for u_n får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
$u_{n+1} = \frac{6}{3^{n+1}(2n+3)\cdot 1.732}$	0.3849	0.0769	0.0183	0.0047	0.0012
$\sum_{k=0}^{n} \frac{6}{3^k(2k+1)\cdot 1.732}$	3.4642	3.0792	3.1562	3.1379	3.1426

Så vi ser at $n = 4$ holder. Siden det første utelatte leddet har negativt fortegn, vil summen av de 4 første leddene være et overestimat. Hvis vi setter feilen lik 0.002 (selv om vi fra tabellen ser at den er mindre), får vi $3.1426 - 0.002 = 3.1406$ som et nedre estimat for π, og dermed har vi vist at $3.1406 < \pi < 3.1426$ (spesielt ser vi at de to første desimalene er sikre).

5 **a)** Volumet kan beregnes ved skivemeotden eller sylindermetoden. Vi viser begge metodene.

Skivemetoden: Her integrerer vi langs y-aksen fra $y = 0$ til $y = h$. For en gitt y vil radien i skiva være lik $y^{1/k}$ og vi får:

$$V = \int_0^h \pi (y^{1/k})^2 dy = \int_0^h \pi y^{2/k} dy = \pi \left[\frac{1}{1 + 2/k} y^{1+2/k} \right]_{y=0}^{y=h} = \frac{\pi}{1 + 2/k} h^{1+2/k}.$$

Sylindermetoden: Her integrerer vi langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = h^{1/k}$. For en gitt x vil høyden i sylinderskallet være lik $h - x^k$. Vi får:

$$V = \int_0^{h^{1/k}} 2\pi x(h - x^k) dx = 2\pi \int_0^{h^{1/k}} (hx - x^{k+1}) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2} hx^2 - \frac{1}{k+2} x^{k+2} \right]_{x=0}^{x=h^{1/k}}$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} h h^{2/k} - \frac{1}{2+k} (h^{1/k})^{k+2} \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2} h^{1+2/k} - \frac{1}{2+k} h^{1+2/k} \right]$$

$$= 2\pi h^{1+2/k} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} \right] = 2\pi h^{1+2/k} \frac{k}{2(k+2)} = \frac{\pi}{1 + 2/k} h^{1+2/k}.$$

b) Fra **a)** har vi at volumet V ved vannhøyde y er gitt ved $V = V(y) = \frac{\pi}{1+2/k} y^{1+2/k}$, og Torricellis lov sier at $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y}$. Til sammen gir dette:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{1 + 2/k} y^{1+2/k} \right] = \pi y^{2/k} \frac{dy}{dt} = -y^{1/2},$$

og vi ser at $\frac{dy}{dt}$ er konstant hvis og bare hvis $\boxed{k = 4}$.
Med denne verdien av k får vi $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\pi}$, og dermed $y = -\frac{1}{\pi} t + C$, hvor C er en konstant. Hvis vi setter $t = 0$ når $y = 1$, får vi $1 = C$ og dermed $y = 1 - \frac{1}{\pi} t$. Tanken er tom når $y = 0$, og det gir $\boxed{t = \pi}$. Dermed tar det π tidsenheter å tømme tanken.

NTNU
Institutt for matematiske fag

Kontinuasjonseksamen i TMA4100 Matematikk 1 5. august 2013

Løsningsforslag

1

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos(x^2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+1}{\ln(1-x)-x\frac{1}{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{-\ln(1-x)-2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2 **a)** Vi viser først at ligningen har en løsning i intervallet $[0,1]$. Sett $f(x)=x^3+x-1$. Vi har $f(0)=-1<0$ og $f(1)=1>0$, så $f(0)<0<f(1)$. Fra skjæringssetningen (Intermediate Value Theorem) følger at det finnes et $x\in[0,1]$ slik at $f(x)=0$. Så ligningen har en løsning i $[0,1]$.Videre har vi at $f'(x)=3x^2+1>0$ for alle x, så f er strengt voksende. Dette medfører at det ikke finnes mer enn ett x slik at $f(x)=0$, så løsningen er entydig.

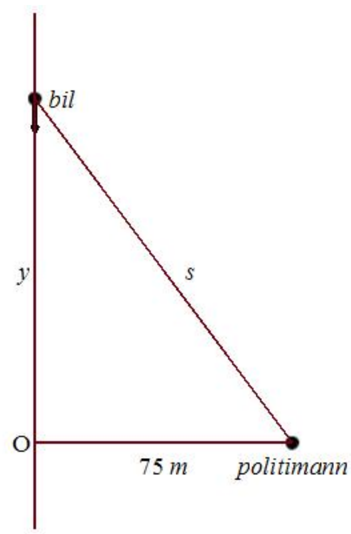
b) Vi har $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+x_n-1}{3x_n^2+1}$, $n=0,1,2,3,\ldots$. Med startverdi $x_0=1$ får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	0.75	0.6860465116	0.6823395824	0.6823278040

Vi ser at fjerde desimal ikke endrer seg etter tredje iterasjon, så vi tar $\boxed{x=0.6823}$ som tilnærmet løsning med 4 desimalers nøyaktighet.

3 Med betegnelser som på figuren er bilens hastighet gitt ved $\frac{dy}{dt}$, hvor t er tiden. For alle t gjelder at $y^2+75^2=s^2$. Derivasjon av denne ligningen mhp. t gir $2y\frac{dy}{dt}=2s\frac{ds}{dt}$, dvs., $\frac{dy}{dt}=\frac{s}{y}\frac{ds}{dt}$. I det gitte øyeblikket er $s=125$ m og $ds/dt=-20$ m/s, som gir $y=\sqrt{125^2-75^2}$ m $=100$ m og $\frac{dy}{dt}=\frac{125}{100}(-20)$ m/s $=-25$ m/s $=-90$ km/h. Så bilen kjører med en fart av $\boxed{90\text{ km/h}}$.

For de som løste oppgaven ut fra feil bokmålsversjon: Her er $ds/dt=-17,5$ m/s, så $\frac{dy}{dt}=\frac{125}{100}(-17,5)$ m/s $=-21,875$ m/s $=-78,75$ km/h. Så bilen kjører med en fart av $\boxed{78,75\text{ km/h}}$.



4 **a)** La V være volumet til rotasjonslegemet. Med skivemetoden får vi:

$$V = \int_0^h \pi\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^2 dy = \frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \boxed{\frac{\pi}{2}\frac{h^2}{a}}.$$

b) Hvis vi lar y være vannhøyden, vil volumet V ved vannhøyde y være gitt ved

$$V = V(y) = \frac{\pi}{2}\frac{y^2}{a}.$$

Derivasjon mhp. tiden t gir $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{a}y\frac{dy}{dt}$, dvs., $\frac{dy}{dt} = \frac{a}{\pi y}\frac{dV}{dt}$. I det gitte øyeblikket er $\frac{dV}{dt} = -2\,\mathrm{dm}^3$ og $y = 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}$. Med $a = \pi\,\mathrm{dm}^{-1}$ gir dette

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\pi\,\mathrm{dm}^{-1}}{\pi\cdot 10\,\mathrm{dm}}(-2)\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}} = -0,2\,\mathrm{dm/s} = -2\,\mathrm{cm/s}.$$

Med andre ord: Vannhøyden avtar med $\boxed{2\text{ cm/s}}$ i det gitte øyeblikket.

5 **a)** Med $u_n = \frac{x^{n+1}}{n}$ får vi

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n|x|^{n+2}}{(n+1)|x|^{n+1}} = \frac{n}{n+1}|x| \to |x| \quad \text{når } n \to \infty.$$

Forholdskriteriet gir da at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$, dvs., $\boxed{R = 1}$.
Endepunkter.
$x = 1$: Vi får den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som $\boxed{\text{divergerer}}$ (f.eks. ved integralkriteriet).
$x = -1$: Vi får den alternerende harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ som $\boxed{\text{konvergerer}}$ ved Leibniz's kriterium, nemlig: Rekken er alternerende, og absoluttverdien til leddene går *monotont* mot 0.

b) Med $f(x) = xg(x)$ får vi $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ for $|x| < 1$. Leddvis derivasjon av rekken er tillatt innenfor det åpne konvergensintervallet, så vi får $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ når $|x| < 1$. Dette er en geometrisk rekke med faktor x, og summeformelen for geometriske gir $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ når $|x| < 1$. Siden $g(x) = 0$, får vi $g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$, som til slutt gir

$$f(x) = xg(x) = \boxed{-x\ln(1-x)} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y' - (2/x)y = x^2, \ y(1) = 2.$$

Løsning: $y' - (2/x)y = x^2$ er en førsteordens lineær differensialligning. Vi finner en løsning på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren er $e^{\int -(2/x)\ dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$, så ligningen kan bli omskrivet til

$$\frac{d}{dx}(yx^{-2}) = \frac{y'}{x^2} - 2\frac{y}{x^3} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Det følger at $yx^{-2} = \int 1\ dx = x + c$. Da $y(1) = 2$, følger det at $c = 1$, så løsningen til initialverdiproblemet $y' - (2/x)y = x^2, \ y(1) = 2$ er $y = x^2(x+1) = x^3 + x^2$.

Oppgave 2 Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}.$$

Løsning: Da $x^3 + x = x(x^2+1)$ forsøker vi at omskrive $\dfrac{1}{x^3+x}$ til $\dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x}$ for passende valg av konstanter a, b og c.

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} = \frac{(ax+b)x + c(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^2 + bx + c}{x^3+x}$$

så $\dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x} = \dfrac{1}{x^3+x}$ hvis og bare hvis $a + c = 0$, $b = 0$ og $c = 1$. Det er enkelt å se at $a + c = 0$, $b = 0$ og $c = 1$ hvis og bare hvis $a = -1$, $b = 0$ og $c = 1$. Vi har altså at $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$, og dermed at

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx - \frac{x}{x^2+1}\ dx.$$

Vi har at

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c.$$

For å beregne integralet $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$ gjør vi bruk av substitusjonen $y = x^2 + 1$. Da er $dy = 2x\ dx$ og

$$\int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x}\ dx - \frac{x}{x^2+1}\ dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Oppgave 3 Vi skal løse ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$.

a) Vis at ligningen har nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 2]$. Har ligningen noen løsning utenfor dette intervallet?

Løsning: Funksjonen $f(x) = x^2 - 2\cos x$ er kontinuerlig, og da $f(0) = -2 < 0$ og $f(2) = 4 - 2\cos(2) > 0$ følger det av skjæringssetningen (mellomverdisetningen) at det finnes en c i intervallet $[0, 2]$ slik at $f(c) = 0$. Ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ har altså en løsning på intervallet $(0, 2)$. Da $f'(x) = 2x + 2\sin(x) > 0$ for alle $x > 0$, er f strengt voksende på intervallet $[0, \infty)$, og ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ har derfor nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 2]$.

Da f er en jevn funksjon (dvs. $f(-x) = f(x)$ for alle x), må ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ også ha en løsning på intervallet $[-2, 0]$ (nemlig $x = -c$).

(Da f er strengt avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$ (fordi f er jevn og strengt voksende på $[0, \infty)$), og strengt voksende på $[0, \infty)$, følger det at $x = \pm c$ er de eneste løsningene til ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$.)

b) Bruk Newtons metode til å finne løsningen på intervallet $[0, 2]$ med tre desimalers nøyaktighet.

Løsning: Vi lar $x_0 = 1$ og setter

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2\cos x_n}{2x_n + 2\sin x_n}.$$

Da får vi $x_1 = 1{,}021885930$, $x_2 = 1{,}021689970$ og $x_3 = 1{,}021689954$. Det synes at de 3 første desimaler har stabilisert seg, så vi gjetter på at løsningen med tre desimalers nøyaktighet er $x = 1{,}022$, dvs. vi gjetter på at løsningen tilhører intervallet $[1{,}0215, 1{,}0225)$. Da $f(1{,}0215) = -0{,}000712152 < 0$ og $f(1{,}0225) = 0{,}003038154 > 0$ ser vi at det er tilfellet, så løsningen med tre desimalers nøyaktighet er $x = 1{,}022$.

(Hadde vi i stedet startet med $x_0 = 2$, hadde vi fått $x_1 = 1{,}169508482$, $x_2 = 1{,}029192017$, $x_3 = 1{,}021712598$, $x_4 = 1{,}021689954$ og $x_5 = 1{,}021689954$. Vi kan ikke starte med $x_0 = 0$ fordi $f'(0) = 0$.)

Oppgave 4 Finn punktene der funksjonen $f(x) = |x - 1| - (x - 2)^2$ oppnår henholdsvis sitt maksimum og sitt minimum på intervallet $[0, 4]$.

Løsning: Funksjonen f oppnår sitt maksimum og minimum enten i endepunktene av intervallet, i punkter der f ikke er deriverbar, eller i punkter der $f'(x) = 0$. Funksjonen f er deriverbar i alle punkter pånær når $x = 1$, og

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - 2(x-2) & \text{for } x < 1, \\ 1 - 2(x-2) & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Vi har at

$$-1 - 2(x-2) = 0 \iff x - 2 = -1/2 \iff x = 3/2,$$

og

$$1 - 2(x-2) = 0 \iff x - 2 = 1/2 \iff x = 5/2,$$

så det eneste punktet i intervallet $[0,4]$ der $f'(x) = 0$ er $x = 5/2$. Da $f(0) = -3 < f(1) = f(4) = -1 < f(5/2) = 5/4$, ser vi at funksjonen f oppnår sitt maksimum på intervallet $[0,4]$ i punktet $x = 5/2$ og sitt minimum på intervallet $[0,4]$ i punktet $x = 0$.

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{2\cos^2 t - 1}\, dt, \ \ x \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Bestem buelengden til grafen til f.

Løsning: Buelengden til grafen til f er

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\ dx.$$

Det følger av analysens fundamentalsetning at $f'(x) = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$, så $(f'(x))^2 + 1 = 2\cos^2 x$ og $\sqrt{(f'(x))^2 + 1} = \sqrt{2}\cos x$ (da $\cos(x) \geq 0$ for $x \in [-\pi/4, \pi/4]$), og derfor er buelengden til grafen til f lik

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\ dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\cos x\ dx &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos x\ dx = 2\sqrt{2}[\sin x]_0^{\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}(\sin(\pi/4) - \sin(0)) = 2\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - 0) = 2.\end{aligned}$$

(Vi har her brukt at $\cos x$ er en jevn funksjon fra hvilke det følger at $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\ dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos x\ dx$.)

Oppgave 6 Uttrykk funksjonen

$$\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$$

som en Maclaurinrekke, og bruk denne rekken til å uttrykke det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$$

som en alternerende rekke. Hvor mange ledd må du summere for at partialsummen av denne rekken skal approksimere integralet med en feil mindre enn 10^{-2}? (Vink: Det kan antas kjent at

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

holder for alle reelle tall t.)

Løsning: Da $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ holder for alle reelle tall t, er

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

for alle reelle tall x, og derfor er

$$e^{-x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

og for alle reelle tall x, og

$$\frac{e^{-x^2}-1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!}$$

for alle reelle tall x forskjellig fra 0. Hvis $x = 0$ så er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!} = -1$. Det følger at hvis vi definerer funksjonen f ved å sette

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2} & \text{hvis } x \neq 0, \\ -1 & \text{hvis } x = 0, \end{cases}$$

så er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!}$$

Maclaurinrekken til f. Da Maclaurinrekken til f konvergerer mot $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ for alle x der $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ er definert (dvs. for alle $x \neq 0$), har vi uttrykt funksjonen $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ som en Maclaurinrekke.

Det følger også at

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(n+1)!}\,dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(n+1)!}$$

Vi har hermed uttrykt det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$$

som en alternerende rekke.

Da følgen $\left\{\frac{1}{(2n+1)(n+1)!}\right\}$ er en monoton avtagende følge som konvergerer mot 0, følger det at

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(k+1)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+1)(n+1)!}$$

for alle $n \geq 1$. Vi har derfor at hvis $\frac{1}{(2n+1)(n+1)!} < 10^{-2}$, så vil $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(k+1)!}$ approksimere integralet $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$ med en feil mindre enn 10^{-2}. Da $\frac{1}{(2+1)(1+1)!} = 1/6 > 1/100$, $\frac{1}{(2\cdot2+1)(2+1)!} = 1/30 > 1/100$, og $\frac{1}{(2\cdot3+1)(3+1)!} = 1/168 < 1/100$, må vi summerer de 3 første leddene av rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(n+1)!}$ for at partialsummen approksimerer integralet med en feil mindre enn 10^{-2}.

Oppgave 7 Sindre skal steke ribbe til julaften og følger en oppskrift han har funnet på Internett. Vi kan anta at temperaturen på kjøkkentet er 21 grader. I tillegg antar vi at Newtons avkjølingslov gjelder slik at temperaturen i ribba endres med en rate som er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom ribba og omgivelsene (kjøkken eller ovn). Vi antar dessuten at temperaturen i Sindres ovn endrer seg momentant til ønsket temperatur når Sindre skrur på bryteren.

a) Sindre tar ribba ut av kjøleskapet en time før han skal steke den. Han stikker umiddelbart steketermometeret i ribba og leser av at temperaturen er 4 grader. Idet han setter ribba inn i ovnen, leser han av at temperaturen er 7 grader. Han lar så ribba steke i 30 minutter på 230 grader. Hva viser steketermometeret da?

Løsning: La T_0 være temperaturen til omgivelsene, og la $T(t)$ være temperaturen til ribba til tiden t hvor t måles i timer. Da har vi at

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T_0 - T(t)) \tag{1}$$

for en konstant k. Ligningen (1) er en separabel differensialliging. Hvis vi separarer de variable får vi $kdt = \frac{dT(t)}{T_0 - T(t)}$, hvorfra følger at

$$kt = \int k\ dt = \int \frac{dT(t)}{T_0 - T(t)} = -\ln|T_0 - T(t)| + c$$

hvor c er en konstant. La vi $t = 0$ ser vi at $c = \ln|T_0 - T(0)|$. Vi har altså at

$$kt = -\ln|T_0 - T(t)| + \ln|T_0 - T(0)| = \ln\left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|.$$

Når ribba stå på kjøkkentet, har vi at $T_0 = 21$, $T(0) = 4$ og $T(1) = 7$, så

$$k = \ln\left|\frac{21-4}{21-7}\right| = \ln\left(\frac{17}{14}\right).$$

Det følger at

$$t\ln\left(\frac{17}{14}\right) = \ln\left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|$$

og dermed at

$$\left(\frac{17}{14}\right)^t = \left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|.$$

Temperaturen til ribba kan ikke bli høyere enn temperaturen til omgivelsene, så $|T_0 - T(0)| = T_0 - T(0)$ og $|T_0 - T(t)| = T_0 - T(t)$. Herav følger at

$$T_0 - T(t) = \left(\frac{14}{17}\right)^t (T_0 - T(0))$$

og dermed at

$$T(t) = T_0 - \left(\frac{14}{17}\right)^t (T_0 - T(0)).$$

Når ribba stekes i ovnen er $T_0 = 230$ og $T(0) = 7$, så

$$T(1/2) = 230 - \left(\frac{14}{17}\right)^{1/2} (230 - 7) = 230 - 223\sqrt{\frac{14}{17}}.$$

Vi har altså at temperaturen til ribba etter den har stekt i 30 minutter er $230 - 223\sqrt{14/17} \approx 28$ grader.

b) I følge oppskriften skal Sindre nå skru temperaturen ned til 160 grader og ta ut ribba når termometeret viser 75 grader. Imidlertid har han nå ikke mer enn to timer til rådighet. Hva må han i stedet endre temperaturen til om julemiddagen skal bli ferdig i tide?

Løsning: Nå er $T(0) = 230 - 223\sqrt{14/17}$, og vi ønsker at $T(2) = 75$. Vi skal altså finne T_0 slik at

$$T(t) = T_0 - \left(\frac{14}{17}\right)^2 \left(T_0 - \left(230 - 223\sqrt{14/17}\right)\right) = 75.$$

Det følger at vi må ha

$$T_0 = \frac{75 - \left(\frac{14}{17}\right)^2 \left(230 - 223\sqrt{14/17}\right)}{1 - \left(\frac{14}{17}\right)^2} = \frac{43708\sqrt{238} - 397885}{1581} \approx 175.$$

Dvs. temperaturen til ovnen må settes til $\frac{43708\sqrt{238}-397885}{1581} \approx 175$ grader.

Oppgave 8 La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge. Vi antar at det finnes en $r > 0$ slik at følgen $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrenset. Vis at da er potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolutt konvergent når $|x| < r$.

Løsning: Da følgen $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrenset, finnes et tall K slik at $|a_n r^n| \leq K$ for alle n. Vi har da at $|a_n x^n| = |a_n r^n| \frac{|x^n|}{r^n} \leq K \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ for alle n. Når $|x| < r$ er den geometriske rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} K \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ konvergent (fordi $\frac{|x|}{r} < 1$). Det følger derfor av sammenligningskriteriet at rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ er konvergent når $|x| < r$, dvs. at potensrekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er absolutt konvergent når $|x| < r$.

Oppgave 1 Den rasjonale funksjonen p er definert som

$$p(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2}.$$

Finn de tre grenseverdiene $\lim_{x\to 0} p(x)$, $\lim_{x\to 1} p(x)$ og $\lim_{x\to\infty} p(x)$.

Løsning:

$$\lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Da $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 2 = \lim_{x\to 1} 3x^2 - 5x + 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2$ og $3x^2 - 5x + 2$ er deriverbare på intervallet $(0, 1)$, $\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2) = 6x - 5 \neq 0$ for $x \in (0, 1)$ og

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)}{\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 3}{6x - 5} = \frac{-1}{1} = -1$$

følger det av L'Hopitals regel at

$$\lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)}{\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2)} = -1.$$

Alternativt kan man finne grenseverdien $\lim_{x\to 1} p(x)$ ved å innse at $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ og $3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$, så

$$\lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(3x - 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 2}{3x - 2} = -1.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} p(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3/x + 3/x^2}{3 - 5/x + 2/x^2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2 La funksjonen f være gitt ved $f(x) = 2e^{-x^2} - x$.

a) Vis at det finnes ett, og kun ett, tall $c \in (0, 1)$ slik at $f(c) = 0$.

Løsning: Ettersom f er kontinuerlig og $f(0) = 2 > 0$ og

$$f(1) = 2e^{-1} - 1 = \frac{2-e}{e} < 0$$

fordi $e > 2$, så sier skjæringssetningen at det må finnes et tall $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$.

Nå er $f'(x) = -4xe^{-x^2} - 1 < 0$ for alle $x \in [0,1]$. Dermed er f synkende på hele intervallet og kan krysse x-aksen kun én gang. Altså, det finnes ett, og kun ett, tall $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$.

b) La R være området i første kvadrant begrenset av koordinataksene og kurven $y = f(x)$. Vis at volumet, V, av omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere R om y-aksen er gitt ved

$$V = \frac{\pi}{3}(6 - 3c - 2c^3).$$

Løsning: Et sylinderskall med y-aksen som sentrum, radius x, høyde $f(x)$ og tykkelse dx har volum

$$dV = 2\pi x f(x)\, dx.$$

Summen av alle disse skallene med radius fra $x = 0$ til $x = c$ er dermed

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^c x f(x)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^c \left(2xe^{-x^2} - x^2\right) dx. \end{aligned}$$

Med substitusjonen $u = x^2$ er $du = 2x\,dx$ og

$$\begin{aligned} \int_0^c 2xe^{-x^2}\, dx &= \int_0^{c^2} e^{-u}\, du \\ &= -\Big|_0^{c^2} e^{-u} \\ &= 1 - e^{-c^2} \\ &= 1 - \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

der den siste likheten kommer av at $2e^{-c^2} - c = 0$. Videre er $\int_0^c x^2\, dx = c^3/3$, så

$$V = 2\pi\left(1 - \frac{c}{2} - \frac{c^3}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6 - 3c - 2c^3\right).$$

c) Finn c med en nøyaktighet på tre desimaler vha. Newtons metode og bruk dette til å anslå en tilnærmet verdi av V.

Løsning: Vi setter

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{2e^{-x_n^2} - x_n}{4x_n e^{-x_n^2} + 1}.$$

Med startverdien $x_0 = 1/2$ får vi iterasjonen

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= 0.91351 \\ x_2 &= 0.89598 \\ x_3 &= 0.89605 \\ x_4 &= 0.89605 \end{aligned}$$

og vi tolker de stabile verdiene som at c, til tre desimaler, er $c = 0{,}896$, dvs. vi gjetter på at c tilhører intervallet $[0{,}8955, 0{,}8965)$. Da $f(0{,}8955) = 0{,}0014339 > 0$ og $f(0{,}8965) = -0{,}0011719 < 0$ ser vi at det er tilfellet, så c er, med en nøyaktighet på tre desimaler, lik 0,896.

Volumet av rotasjonslegemet er da

$$V \approx 1{,}961.$$

Oppgave 3 En funksjon f har verdi 1 og stigningstall $1/2$ i $x = 0$. Videre er $f''(0) = 1/2$ og generelt er den n'te-deriverte av f i 0 gitt ved

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}, \qquad \text{for alle } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Hvis f er analytisk på intervallet $(-2, 2)$, dvs. hvis $f(x)$ er lik sin Maclaurin-rekke (Taylor-rekke om 0) for alle $x \in (-2, 2)$, hva er $f(1)$?

Løsning: Ettersom f er lik sin Maclaurin-rekke, er

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - x/2} \\ &= \frac{2}{2 - x} \end{aligned}$$

for alle $x \in (-2, 2)$. Spesielt er

$$f(1) = \frac{2}{2-1} = 2.$$

Oppgave 4 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x, \quad y(\sqrt{2}) = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

Løsning: Ligningen $\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x$ er en separabel differensialligning. Hvis vi separarer de variable får vi $\frac{1}{y^2+y}\, dy = x\, dx$, hvorav følger at $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1$.

For å utregne intergralet $\frac{1}{y^2+y}\, dy$ forsøker vi oss med delbrøkoppspalting: Da $y^2 + y = y(y+1)$ gjetter vi på at vi kan finne A og B slik at $\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y^2+y}$. Da

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + By}{y(y+1)} = \frac{(A+B)y + A}{y^2 + y}$$

har vi at $\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y^2+y}$ hvis og bare hvis $A + B = 0$ og $A = 1$. Vi har altså at $\frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ og dermed at

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\, dy = \ln(y) - \ln(y+1) + c_2.$$

Det følger at $\ln(y)-\ln(y+1)=x^2/2+c$ for en konstant c. Da $y(\sqrt{2})=\frac{e^2}{1-e^2}$ følger det at $c=\ln(\frac{e^2}{1-e^2})-\ln(\frac{e^2}{1-e^2}+1)-1=\ln(\frac{e^2}{1-e^2})-\ln(\frac{1}{1-e^2})-1=\ln(e^2)-1=2-1=1$. Vi har altså at $\ln(y)-\ln(y+1)=x^2/2+1$. Da

$$\begin{aligned}
\ln(y)-\ln(y+1)=x^2/2+1 &\iff e^{\ln(y)-\ln(y+1)}=e^{x^2/2+1}\\
&\iff \frac{y}{y+1}=e^{x^2/2+1}\\
&\iff y=(y+1)e^{x^2/2+1}\\
&\iff y(1-e^{x^2/2+1})=e^{x^2/2+1}\\
&\iff y=\frac{e^{x^2/2+1}}{1-e^{x^2/2+1}}
\end{aligned}$$

følger det at $y(x)=\frac{e^{x^2/2+1}}{1-e^{x^2/2+1}}$ er løsningen til initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx}=(y^2+y)x, \quad y(\sqrt{2})=\frac{e^2}{1-e^2}.$$

Oppgave 5 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(x/2)}{x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & x=0.\end{cases}$$

a) Vis at g er en kontinuerlig og jevn funksjon. (En funksjon f er **jevn** hvis $f(-x)=f(x)$ for alle x i domenet til f).

Løsning: g er åpenbart kontinuerlig for alle x bortsett muligens i $x=0$. Det må altså vises at

$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0).$$

Nå er

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(x/2)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\\
&= g(0)
\end{aligned}$$

på grunn av den velkjente grensen $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. Alternativt kan grensen beregnes ved l'Hôpital.

g er en jevn funksjon fordi sin er en odde funksjon og for alle $x \neq 0$ er

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(-x/2)}{-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{-\sin(x/2)}{-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(x/2)}{x} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Trivielt er også $g(-0)=g(0)$.

b) La A være området i planet begrenset av kurven $y=g(x)$ og linjene $y=0$, $x=1$ og $x=-1$. Vis at legemet som fremkommer ved å rotere A om x-aksen har volum

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

og estimér volumet med en feil mindre enn $\epsilon=\frac{1}{200000}$.

Hint:

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \text{og} \quad \cos t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

for alle reelle tall t.

Løsning: En skive i x med radius $g(x)$ og tykkelse dx har volum

$$dV=\pi g^2(x)\,dx.$$

Volumet av omdreiningslegemet er summen av alle skiver fra $x=-1$ til $x=1$:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2 dx \\ &= 2\int_0^1\frac{\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx \\ &= \int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \end{aligned}$$

der den andre likheten kommer av at g er jevn, noe som medfører at g^2 er jevn. Den trigonometriske identiteten i hintet ble brukt i den siste likheten.

Nå er

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

så

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

og

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

Ettersom dette er en absolutt konvergerende rekke kan den integreres ledd for ledd, og dermed er

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n-2}\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \bigg|_0^1 \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}. \end{aligned}$$

La $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}$ og

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Ettersom V er en konvergerende alternerende rekke, er

$$\begin{aligned} |V - s_N| &\leq |a_{N+1}| \\ &= \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1)-1)} \\ &= \frac{1}{(2N+2)!(2N+1)}. \end{aligned}$$

Vi finner nå den minste N slik at denne nevneren er større enn $1/\epsilon = 200000$:

N	(2N+2)!(2N + 1)
1	72
2	3600
3	282240

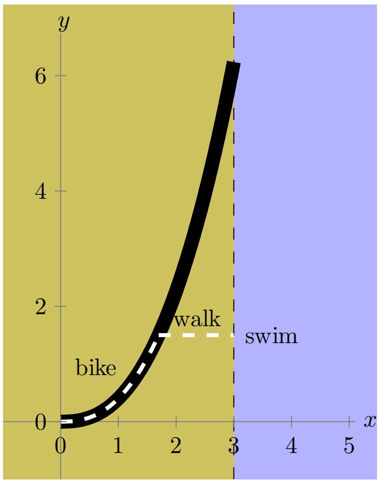
Dermed er $|V - s_3| < \epsilon$ og

$$\begin{aligned} V &\approx s_3 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{3600} \\ &= 0.486389 \end{aligned}$$

med en nøyaktighet på 1/200000.

Oppgave 6

Du bor 3 km fra havet, og fra huset ditt i origo (se figur 1) går det en vei langs kurven $25y^2 = 4x^5$, $x \in [0, 3]$, $y \geq 0$ ned til stranden som ligger på linjen $x = 3$. En dag bestemmer du deg for å sykle eller gå ned til stranden for å bade. Når du sykler må du sykle på veien, men du kan når som helst parkere sykkelen og gå det siste stykket i en rett linje vinkelrett mot strandkanten (det spiller ingen rolle hvor på stranden du bader).



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 6

a) På hvilket punkt (x, y) på veien vil du parkere sykkelen og begynne å gå dersom du ønsker å komme frem på kortest mulig tid når du vet at du sykler 3 ganger raskere enn du går? Husk å bevise at din løsning faktisk gir den korteste reisetiden.

(Vi antar at både gang- og syklehastigheten er konstant.)

Løsning Fordi $y \geq 0$, kan veien beskrives eksplisitt ved

$$y(x) = \sqrt{\frac{4}{25}x^5} = \frac{2}{5}x^{5/2}$$

og lengden langs veien fra origo til punktet (x, y) er da

$$\int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt.$$

La v være ganghastigheten. Tiden det tar å sykle langs veien fra $(0, 0)$ til (x, y) med hastighet $3v$, og deretter gå fra (x, y) til $(3, y)$ med hastighet v, er dermed gitt ved

$$T(x) = \frac{1}{3v}\int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt + \frac{3 - x}{v}.$$

Vi finner minimum til denne kontinuerlige funksjonen på det lukkede intervallet $[0,3]$. T har kritiske punkter der $T'(x) = 0$. Da

$$\begin{aligned} 0 = T'(x) &= \frac{1}{3v}\sqrt{1+x^3} - \frac{1}{v} \\ \iff &\sqrt{1+x^3} = 3 \\ \iff &x = 2, \end{aligned}$$

og ettersom T ikke har singulære punkter, har T sitt minimum enten i $x = 0, x = 2$ eller $x = 3$. Nå er

$$\begin{aligned} T''(x) &= \frac{x^2}{2v\sqrt{1+x^3}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

for alle $x \in (0,3]$. Altså er T' stigende på hele intervallet og ettersom T' er kontinuerlig og $T'(2) = 0$, så er T' negativ på $[0,2)$ og positiv på $(2,3]$. Dermed er T minkende på $[0,2)$ og stigende på $(2,3]$ hvilket beviser at $x = 2$ er et absolutt minimum for T.

For å komme raskest frem til stranden skal man parkere sykkelen i punktet

$$(x, y(x)) = \left(2, \frac{8}{5}\sqrt{2}\right).$$

Alternativt bevis for at $x = 2$ er et absolutt minimum: For $t > 2$ er $\sqrt{1+t^3} > 3$ og dermed er

$$\int_2^3 \sqrt{1+t^3}\,dt > (3-2)\cdot 3 = 3.$$

Det følger da at

$$\begin{aligned} vT(2) &= \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + 1 \\ &< \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + \frac{1}{3}\int_2^3 \sqrt{1+t^3}\,dt \\ &= vT(3). \end{aligned}$$

For $0 \le t < 2$ er $\sqrt{1+t^3} < 3$ og

$$\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt < (2-0)\cdot 3 = 6.$$

Det følger da at

$$\begin{aligned} vT(2) &= \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + 1 \\ &< \frac{1}{3}6 + 1 \\ &= 3 \\ &= vT(0). \end{aligned}$$

Altså er $T(2) < T(0)$ og $T(2) < T(3)$ og $x = 2$ er et absolutt minimum.

b) La funksjonen f være gitt ved $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. For $0 \le x \le 2$ er $|f''(x)| \le 3/2$ (du behøver ikke å vise det). Bruk trapesmetoden for å finne tallet

$$I = \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

med en feil mindre eller lik $1/16$. Kan du ut ifra denne tilnærmingen konkludere med at det tar mindre enn 21 minutter å dra ned til stranden på raksest mulig måte når ganghastigheten er $v = 6$ km/t?

Løsning: Feilformelen for trapesmetoden gir

$$\begin{aligned} |I - T_n| &\le \frac{3}{2}\frac{(b-a)^3}{12n^2} \\ &= \frac{3}{2}\frac{2^3}{12n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

som er mindre eller lik $1/16$ hvis $n = 4$. La $x_i = i/2$ og $y_i = f(x_i)$ for $i = 0, \ldots, 4$. Da er

$$\begin{aligned} I &\approx T_4 \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{70}}{4} + \frac{3}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{7+\sqrt{35}}{8}\sqrt{2} \\ &\approx 3.283 \end{aligned}$$

med en nøyaktighet på $1/16$.

Tiden det tar, i timer, å dra ned til stranden på raskest mulig måte når ganghastigheten er 6 km/t, er

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{1}{3\cdot 6}\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx + \frac{1}{6} \\ &= \frac{I}{18} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Vi vet at $T_4 - \frac{1}{16} \leq I \leq T_4 + \frac{1}{16}$, så

$$\begin{aligned} T(2) &\leq \frac{T_4 + 1/16}{18} + \frac{1}{6} \\ &\approx 0.3525 \\ &= 21.15 \text{ minutter} \end{aligned}$$

så vi kan **ikke** konkludere med at det er mulig å gjøre dette på mindre enn 21 minutter.

Ekstra:
Det kan vises at $f''(x) \geq 0$ på intervallet $[0, 2]$. Trapesmetoden vil alltid gi et estimat som er **større** enn enn den virkelige verdien av integraler av konvekse funksjoner fordi alle rette linjer mellom to punkter på grafen vil ligge over grafen. Altså er

$$T_4 - \frac{1}{16} \leq I \leq T_4$$

og

$$\begin{aligned} T(2) &\leq \frac{T_4}{18} + \frac{1}{6} \\ &\approx 0.3491 \\ &= 20.94 \text{ minutter} \end{aligned}$$

og vi ser at reisetiden faktisk **er** mindre enn 21 minutter. Begge svar, bra begrunnet, godtas.

EKSAMEN TMA4100 HØST 2014
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. Under rottegnet står det $1 + e^x$, og den deriverte til dette uttrykket er e^x, som står utenfor rottegnet. Sett derfor $u = 1 + e^x$. Da får vi

$$\begin{aligned} du/dx &= e^x \\ du &= e^x dx, \end{aligned}$$

og vi kan løse intergralet:

$$\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \boxed{\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Oppgave 2. Her går både teller og nevner mot 0 når x går mot $\pi/2$. Siden begge er deriverbare kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\int_{\pi/2}^{x} \sqrt{2-\cos u}\, du}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_{\pi/2}^{x} \sqrt{2-\cos u}\, du\right)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sqrt{2-\cos x}}{-\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = \boxed{-\sqrt{2}}$$

Her har vi brukt analysens fundamentalteorem til å derivere telleren.

Oppgave 3. Først må vi finne dy/dx i punktet $(1,0)$. Funksjonen er gitt implisitt, men ved å derivere begge sidene med hensyn på x, og bruke blant annet produktregelen og kjerneregelen, får vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x(y+1)+e^y\right) &= \frac{d}{dx}2 \\ \left(\frac{d}{dx}x\right)(y+1) + x\left(\frac{d}{dx}(y+1)\right) + \frac{d}{dx}e^y &= 0 \\ 1\cdot(y+1) + x\frac{dy}{dx} + e^y\frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

I punktet $(1,0)$ er $x = 1$ og $y = 0$, så vi får

$$\begin{aligned} 1 + 2\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tangenten vi er ute etter er altså den rette linjen gjennom punktet $(1,0)$ med stigningstall $-\frac{1}{2}$, og har derfor ligning

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

det vil si

$$\boxed{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$$

Oppgave 4. Nevneren faktoriseres som

$$x(x^2+2x+2),$$

så vi delbrøkoppspalter: det finnes konstanter A, B, C slik at

$$\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Multiplikasjon med fellesnevneren gir

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x \\ 0 &= (A+B)x^2+(2A+C)x+(2A-1), \end{aligned}$$

og vi får

$$A = \tfrac{1}{2}, \quad B = -\tfrac{1}{2}, \quad C = -1.$$

Dette gir

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+2}dx$$

Den siste integranden må vi behandle litt. Den deriverte av nevneren er $2x+2$, så vi splitter opp brøken/integralet og omskriver litt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \end{aligned}$$

I de to siste integralene foretar vi substitusjon:

$$\begin{aligned} u = x^2+2x+2 &\quad\Rightarrow\quad du = (2x+2)dx \\ v = x+1 &\quad\Rightarrow\quad dv = dx, \end{aligned}$$

og vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+1} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{4}\ln|u| - \tfrac{1}{2}\arctan v + C \\ &= \boxed{\tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{4}\ln(x^2+2x+2) - \tfrac{1}{2}\arctan(x+1) + C} \end{aligned}$$

Merk at vi ikke trenger absoluttverditegn på uttrykket x^2+2x+2 siden det aldri er negativt: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$.

Oppgave 5. Diffligningen er på formen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

med $p(x) = x^2 = q(x)$. Den har generell løsning

$$y(x) = e^{-\mu(x)}\int q(x)e^{\mu(x)}dx,$$

hvor $\mu(x)$ er en funksjon som har $p(x)$ som derivert, det vil si $\mu'(x) = x^2$. Vi velger $\mu(x) = \frac{1}{3}x^3$, og får da

$$y(x) = e^{-\frac{1}{3}x^3}\int x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}dx.$$

Substitusjonen

$$u = \tfrac{1}{3}x^3, \qquad du = x^2dx$$

gir da

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\frac{1}{3}x^3}\int e^u du \\
&= e^{-\frac{1}{3}x^3}(e^u + C) \\
&= e^{-\frac{1}{3}x^3}(e^{\frac{1}{3}x^3} + C) \\
&= 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}.
\end{aligned}$$

Siden

$$2 = y(0) = 1 + C$$

får vi $C = 1$ og derfor

$$\boxed{y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}}$$

Oppgave 6. Taylor-polynomet av grad 2 til en funksjon $g(x)$ om punktet $x = 0$ er per definisjon andregradspolynomet

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 \\
&= g(0) + g'(0)x + \tfrac{1}{2}g''(0)x^2.
\end{aligned}$$

Vi må altså finne $g(0), g'(0)$ og $g''(0)$. Generelt vil kjerneregelen/produktregelen anvendt på en sammensatt funksjon $p(q(x))$ gi

$$\begin{aligned}
[p(q(x))]' &= p'(q(x)) \cdot q'(x) \\
[p(q(x))]'' &= p''(q(x)) \cdot q'(x)^2 + p'(q(x)) \cdot q''(x).
\end{aligned}$$

Med $g(x) = f(f(x))$ får vi da

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(f(0)) = f(0) = 0 \\
g'(0) &= f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(0) \cdot f'(0) = 2 \cdot 2 = 4 \\
g''(0) &= f''(f(0)) \cdot f'(0)^2 + f'(f(0)) \cdot f''(0) = f''(0) \cdot f'(0)^2 + f'(0) \cdot f''(0) \\
&= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 = 6.
\end{aligned}$$

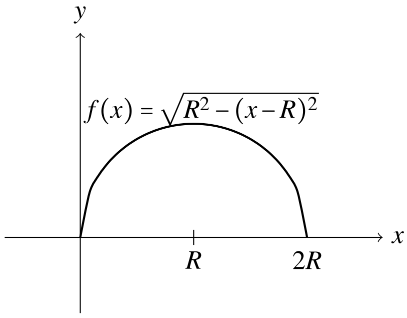
Dette gir

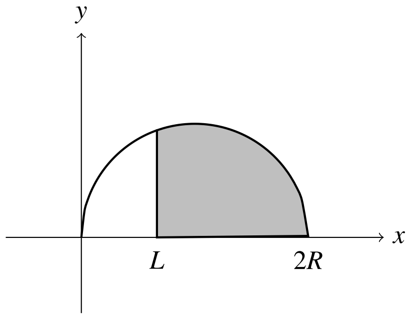
$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 0 + 4x + \tfrac{1}{2} \cdot 6x^2 \\
&= \boxed{4x + 3x^2}
\end{aligned}$$

Oppgave 7. En måte å tenke på en kule med radius R på er som rotasjonslegemet man får ved å rotere halvsirkelen

$$f(x) = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} \qquad 0 \le x \le 2R$$

om x-aksen:





Volumet vi er ute etter er det samme omdreiningsvolumet man får ved å la x gå fra L til $2R$:

$$\begin{aligned} V(L) &= \int_L^{2R} \pi f(x)^2 dx \\ &= \pi \int_L^{2R} (R^2 - (x-R)^2) dx \\ &= \pi \int_L^{2R} (2Rx - x^2) dx \\ &= \pi \left[Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_L^{2R} \\ &= \pi \left(4R^3 - \tfrac{8}{3}R^3 - RL^2 + \tfrac{1}{3}L^3 \right) \\ &= \boxed{\pi \left(\tfrac{4}{3}R^3 - RL^2 + \tfrac{1}{3}L^3 \right)} \end{aligned}$$

Merk at det er flere mulige fremgangsmåter her, f.eks. via et rotasjonslegeme man får ved å rotere en passende graf rundt y-aksen.

Oppgave 8. Det hele handler om antall fisk i innsjøen på et gitt tidspunkt. La derfor $F(t)$ betegne antall fisk etter t dager. Setningen "endringen i fiskebestanden per tidsenhet er proporsjonal med 1 delt på kvadratroten av fiskebestanden" oversettes direkte til diffligningen

$$\frac{dF}{dt} = \frac{k}{\sqrt{F}},$$

hvor k er den ukjente proporsjonalitetskonstanten. Dette er en separabel diffligning: vi får

$$\begin{aligned} \sqrt{F} dF &= k dt \\ \int \sqrt{F} dF &= \int k dt \\ \tfrac{2}{3} F^{\frac{3}{2}} &= kt + C, \end{aligned}$$

(her har vi samlet de to konstantene fra integralene til én konstant C) som gir

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}(kt + C) \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Vi har to konstanter, men også to kjente verdier av F. Siden

$$2500 = F(0) = \left[\tfrac{3}{2} C \right]^{\frac{2}{3}}$$

får vi

$$C = \tfrac{2}{3} \cdot 2500^{\frac{3}{2}} = \frac{250000}{3},$$

altså

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}(kt + \tfrac{250000}{3}) \right]^{\frac{2}{3}} = \left[\tfrac{3}{2}kt + 125000 \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Videre har vi

$$1600 = F(122) = \left[\tfrac{3}{2}\cdot 122k + 125000\right]^{\frac{2}{3}} = [183k + 125000]^{\frac{2}{3}},$$

som gir

$$183k + 125000 = 1600^{\frac{3}{2}} = 64000,$$

det vi si

$$k = -\frac{61000}{183} = -\frac{1000}{3}.$$

Dette gir oss

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1000}{3}\right)t + 125000\right]^{\frac{2}{3}} = [125000 - 500t]^{\frac{2}{3}}.$$

All fisken er død når $F = 0$, det vil si når $125000 - 500t = 0$. Dette gir $t = 250$. Vi sjekker at ikke $F(249)$ ligger mellom 0 og 1 (hvis f.eks. $F(249)$ hadde vært 0.3, *kunne* vi ha tolket det som at all fisken var død også etter 249 dager):

$$F(249) = 500^{\frac{2}{3}} \approx 63.$$

Altså er $F(249) \approx 63$, mens $F(250) = 0$. Konklusjonen blir at

$$\boxed{\text{det vil ta 250 dager før all fisken er død.}}$$

Oppgave 9. Newtons metode for en funksjon $f(x)$ starter med en verdi x_0 og gir verdier $x_1, x_2, \dots$ gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Fra den rekursive formelen vi er gitt i oppgaven får vi

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 3}{2x},$$

og den enkleste funksjonen som tilfredsstiller dette er

$$\boxed{f(x) = x^2 - 3}$$

(merk at for en hvilken som helst konstant k vil også funksjonen $k(x^2 - 3)$ passe inn).

Funksjonen $f(x) = x^2 - 3$ har to nullpunkt, nemlig $\pm\sqrt{3}$. Siden vi starter med $x_0 = 2$ og $f(x)$ er konveks ($f''(x) = 2$), vil følgende holde:

(1) følgen er minkende: $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$
(2) den er nedre begrenset av $\sqrt{3}$, det vil si $\sqrt{3} \le x_n$ for alle n.

$$\boxed{\text{Følgen vil derfor konvergere, og det mot nullpunktet } \sqrt{3}.}$$

Oppgave 10. Den første divergente rekken mange tenker på er den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

så vi prøver å finne to konvergente rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med $a_n b_n = \frac{1}{n}$. Eller hva med en enkelt konvergerende rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n^2 = \frac{1}{n}$? Mange alternerende rekker konvergerer, så la oss prøve å finne en slik. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ skal være en rekke med $a_n^2 = \frac{1}{n}$, så må vi ha

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ eller } a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ved å sette

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

får vi en alternerende rekke

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

som konvergerer ved alternerende rekke-testen. Leddene i denne rekken tilfredsstiller det vi ønsker:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

La nå $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to konvergente rekker, hvorav en av dem, f.eks. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergerer absolutt. Kan det da være slik at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergerer? Det at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt vil si at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ også konvergerer. Det samme kan vi i utgangspunktet ikke si om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, men siden den konvergerer vet vi f.eks. at leddene må gå mot 0:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Kan dette hjelpe oss? Vel, siden leddene går mot 0 må følgen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ være begrenset, det vil si at det finnes et positivt tall $K > 0$ slik at

$$|b_n| \le K$$

for alle n. Dette kan vi bruke til å vise at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ faktisk konvergerer absolutt. Vi får nemlig at

$$0 \le |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le K|a_n|$$

for alle n, og siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer har vi et sammenligningsresultat for positive rekker som sier at da må rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ også konvergere. Dette betyr at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergerer absolutt, og fra teorien følger det da at rekken selv også konvergerer. Så svaret er

$$\boxed{\text{nei, det samme kan ikke skje hvis en av rekkene i tillegg konvergerer absolutt.}}$$

1 Delvis integrasjon med $u'(x) = x^2$ og $v(x) = \ln x$ gir

$$\int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

2 Differensialligningen er separabel. Vi løser ved separasjon av variabler. Det gir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{e^x} &= \sin t \, \mathrm{d}t \\
\int e^{-x} \, \mathrm{d}x &= \int \sin t \, \mathrm{d}t \\
-e^{-x} &= -\cos t - C \\
e^{-x} &= \cos t + C \\
-x &= \ln(\cos t + C).
\end{aligned}$$

Det vil si,

$$x(t) = \ln\left(\frac{1}{\cos t + C}\right).$$

Fra initialbetingelsen $x(0) = 1$ får vi at $C = e^{-1} - 1$. Altså er

$$x(t) = \ln\left(\frac{e}{e\cos t + 1 - e}\right).$$

3 Vi observerer at $\sqrt{x} \geq x^2$ for $x \in [0, 1]$. Skivemetoden gir

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x - x^4) \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

4 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

der vi får at $A = C = 1$ og $B = 0$. Dermed er

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1}\right) \mathrm{d}x = \ln|x| + \arctan x + C.$$

5 Funksjonen f er kontinuerlig på det lukkede intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Altså har f en maksimalverdi og en minimalverdi på $[-\pi/2, \pi/2]$ ved ekstremalverditeoremet. Vi må dermed sjekke endepunktene samt eventuelle kritiske og singulære punkter.

Ved å benytte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{x}{|x|}$ for alle $x \neq 0$ får vi

$$f'(x) = \frac{x}{|x|}\cos|x| - \frac{1}{2}$$

slik at $f'(x) = 0$ har løsning $x = \pi/3$. Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|$ ikke eksisterer for $x = 0$, er $x = 0$ et singulært punkt.

Fra

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{4} \approx 2.7854 \qquad f(0) = 1$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 \approx 1.3424 \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{4} \approx 1.2146$$

ser vi at f oppnår sitt maksimum i $x = -\pi/2$ og sitt minimum i $x = 0$.

$\boxed{6}$ Fra oppgaveteksten får vi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv(t)^2,$$

der $v(t)$ betegner hastigheten (målt i km/time), t er antall timer og k er proposjonalitetskonstanten. Videre har vi at $v(0) = 8$ og $v(1/12) = 6$.

Differensialligningen er separabel og vi løser ved separasjon av variabler. Det gir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= -k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \int -k\,\mathrm{d}t \\
-\frac{1}{v} &= -kt - C \\
\frac{1}{v} &= kt + C.
\end{aligned}$$

Det vil si,

$$v(t) = \frac{1}{kt + C}.$$

Fra $v(0) = 8$ får vi at $C = 1/8$. Altså er

$$v(t) = \frac{8}{8kt + 1}.$$

Fra $v(1/12) = 6$ får vi $k = 1/2$. Det vil si,

$$v(t) = \frac{8}{4t + 1}.$$

For å finne t slik at $v(t) = 1$ løser vi $8/(4t + 1) = 1$ med hensyn på t. Litt regning gir $t = 7/4$. Altså har boreplattformen hastighet 1 km/time etter 7/4 time, det vil si 1 time og 45 minutter.

$\boxed{7}$ **a)** Fra formelen for bulengden til grafen til en funksjon får vi

$$s = \int_2^7 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^7 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x$$

Vi regner ut integralet $\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon. La $u = 9x + 22$. Da er

$$\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_{40}^{85} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{40}^{85} = \frac{2}{27}(85\sqrt{85} - 80\sqrt{10}).$$

Altså er

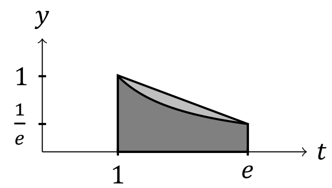
$$s = \frac{1}{2}\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{27}(85\sqrt{85} - 80\sqrt{10}) = \frac{5\sqrt{5}}{27}(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}).$$

b) Legg merke til at $f(g(x)) = (x^{2/3} - 2 + 2)^{3/2} = x$ og $g(f(x)) = ((x + 2)^{3/2})^{2/3} - 2 = x + 2 - 2 = x$. Altså er f og g inverse funksjoner av hverandre. Dermed må grafene deres ha samme buelengde.

8 Trapesmetoden med $n = 1$ gir

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t} \approx (e-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \approx 1.1752 > 1.$$

En måte å se at trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet er å tegne grafen til $f(t) = 1/t$ og trapeset gitt av trapesmetoden med $n = 1$ i samme figur.



Det er klart at arealet av trapeset er større enn arealet under grafen til $f(t)$. Altså vil trapesmetoden med $n = 1$ gi en for stor verdi for integralet.

Fra

$$\frac{1}{2}(e - e^{-1}) > 1$$

får vi, ved å gange begge sider med $2e$, at

$$e^2 - 1 > 2e.$$

Det vil si, $e^2 - 2e - 1 > 0$.

Legg merke til at $e^2 - 2e - 1 = (e-1)^2 - 2$. Altså er

$$e^2 - 2e - 1 = (e-1)^2 - 2 > 0.$$

Det vil si, $(e-1)^2 > 2$. Ved å ta kvadratoten på begge sider av ulikhetstegnet, samt legge til 1 på begge sider, får vi

$$e > \sqrt{2} + 1 \approx 2.4142.$$

9 La $f(x) = xe^{-x^2}$. Da er

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2}$$

en Riemann-sum for f på intervallet $[0, 1]$. Det gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2} = \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vi regner ut integralet $\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon. La $u = -x^2$. Da er

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u\, u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

Altså er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

$\boxed{1}$ Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$e^{x-y} + xe^{x-y}\left(1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

som innsatt for $(x, y) = (1, 0)$ gir

$$2e - (e+1)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Det vil si,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,0)} = \frac{2e}{e+1}.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(x, y) = (1, 0)$ er så gitt ved

$$y = \frac{2e}{e+1}(x-1).$$

$\boxed{2}$ Observer at $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$. Delbrøkoppspalting gir at

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x}$$

slik at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x} = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x| + C.$$

$\boxed{3}$ I vårt tilfelle er $f(x, y) = \cos(xy - x)$ slik at

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\cos(x_n y_n - x_n), \qquad x_n = x_0 + nh,$$

der $h = 0.1$, $x_0 = 0$ og $y_0 = 0.9$. Dermed er

$$y_1 = y_0 + h\cos(x_0 y_0 - x_0) = 0.9 + 0.1\cos 0 = 1,$$

og

$$y_2 = y_1 + h\cos(x_1 y_1 - x_1) = 1 + 0.1\cos 0 = 1.1.$$

$\boxed{4}$ **a)** Ettersom P_4 er taylorpolynomet av grad 4 til f om $a = 0$ vet vi at

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0) = 3 + 2x^2 + x^3 + 4x^4$$

slik at $1/3!\, f'''(0) = 1$. Det vil si, $f'''(0) = 6$.

b) Taylors formel gir i vårt tilfelle at

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(s)}{5!}x^5$$

der s ligger mellom 0 og x. Fra oppgaveteksten vet vi at $|f^{(5)}(x)| \le 12$ for alle x slik at

$$|E_4(x)| \le \frac{12}{5!}|x|^5 = \frac{1}{10}|x|^5.$$

For at $|x|^5/10 \le 10^{-6}$ må $|x|^5 \le 10^{-5}$. Det vil si, $|x| \le 1/10$.

$\boxed{5}$ Gitt et rektangel med bredde b og høyde h, og omkrets $c = 2b + 2h$ har vi at arealet til rektangelet er gitt ved

$$A = bh = \frac{b}{2}(c - 2b)$$

La $f(b) = (b/2)(c - 2b)$. Vi ønsker å finne b slik at $f(b)$ blir størst mulig. Da f har ingen singulære punkter (punkter der den deriverte ikke er definert), og endepunktene er uinteressante, ser vi på eventuelle kritiske punkter.

Ettersom

$$f'(b) = \frac{1}{2}(c - 2b) - b = \frac{c}{2} - 2b = 0$$

har løsning $b = c/4$ får vi at $h = c/2 - b = c/2 - c/4 = c/4$. Altså får vi størst areal ved å velge $b = h = c/4$ for et rektangel med en gitt omkrets c, det vil si et kvadrat med sidelengde $c/4$.

Vi skal nå finne dimensjonen til den største «rektangulære» pakken som kan sendes som en særpakke. Fra den første delen til oppgaven vet vi at vi får størst areal dersom det vertikale tverrsnittet er et kvadrat. La det vertikale tverrsnittet ha sidelengde x, og dermed areal x^2. Fra regelen til Posten angående særpakker vet vi at

$$4x + s = 150$$

der s er den største lengden. Det vil si, $s = 150 - 4x$. Altså er volumet til særpakken gitt ved

$$V(x) = x^2 s = x^2(150 - 4x).$$

Vi ønsker å finne x slik at $V(x)$ blir størst mulig. Da V har ingen singulære punkter (punkter der den deriverte ikke er definert), og endepunktene er uinteressante, ser vi på eventuelle kritiske punkter.

Ettersom

$$V'(x) = 2x(150 - 4x) - 4x^2 = 300x - 12x^2 = 12x(25 - x) = 0$$

har løsning $x = 0$ og $x = 25$, og der $x = 0$ er uinteressant, vet vi at $V(x)$ må innta sin største verdi når $x = 25$ og dermed $s = 150 - 4x = 50$.

$\boxed{6}$ Ved analysens fundamentalsetning er

$$f'(x) = \sqrt{x^4 - 1}$$

slik at buelengden til grafen til f på intervallet $[1, 2]$ er gitt ved

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1 + x^4 - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{7}{3}.$$

$\boxed{7}$ Fra definisjonen til den deriverte får vi at

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}.$$

Observer at $|\sin 1/h| \leq 1$ for alle $h \neq 0$. Det gir at

$$-|h| \leq h \sin\frac{1}{h} \leq |h|$$

for alle $h \neq 0$. Skviseregelen gir så at

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Altså eksisterer den deriverte til f i $x = 0$, og dermed er f deriverbar i $x = 0$.

8 (i) Observer at $n^2(1/2)^n = n^2 e^{n\ln(1/2)} = n^2 e^{-n\ln 2}$. I kampen mellom en potens (et polynom) og en eksponentialfunksjon, vinner alltid eksponentialfunksjonen, som i vårt tilfelle betyr at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n\ln 2}} = 0.$$

Da

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(1/2)^{n+1}}{n^2(1/2)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

gir forholdstesten at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(1/2)^n$ konvergerer. (Merk at det forholdstesten gjør er å sammenligne med en passende geometrisk rekke.)

(ii) Observer at $\sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$. Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

som er den harmoniske rekken. Den harmoniske rekken divergerer (som vi ser ved for eksempel integraltesten).

(iii) Maclaurinrekken (taylorrekken om $a = 0$) til $f(x) = e^x$ er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt har vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} = e^{10}.$$

9 Maclaurinrekken (taylorrekken om $a = 0$) til $\sin x$ er gitt ved

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+3}$$

som igjen gir at

$$\frac{\sin x^3}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}.$$

Altså kan vi uttrykke det bestemte integralet

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x^3}{x^3}\, \mathrm{d}x$$

som den alternerende rekken

$$\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x^3}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(6n+1)}.$$

La s_n være den $n$te partialsummen til rekken. Det vil si,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(6k+1)}.$$

La a_n være det $n$te leddet til den alternerende rekken. Det vil si,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(6n+1)}.$$

Observer at $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
I vårt tilfelle er så feilen til approksimasjonen for integralet ved partialsummen s_n, gitt ved

$$|I - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)!\,(6n+7)}.$$

For at $|a_{n+1}| \leq 10^{-3}$ må $(2n+3)!\,(6n+7) \geq 10^3 = 1000$. Fra tabellen

n	0	1
$(2n+3)!\,(6n+7)$	42	1560

ser vi at vi må summere opp de to første leddene, a_0 og a_1, for at partialsummen skal gi en approksimasjon til integralet som har feil mindre enn 10^{-3}.

1 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$y^3 + 3xy^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + e^{xy}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + 2x = 0,$$

som innsatt for $(x, y) = (1, 1)$ gir

$$3 + 3\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)} + \left(1 + 2\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)}\right)e = 0.$$

Det vil si,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{e+3}{2e+3}.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(x, y) = (1, 1)$ er så gitt ved

$$y = 1 - \frac{e+3}{2e+3}(x-1).$$

2 Observer at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = e^x$$

er en 1. ordens lineær differensialligning med $p(x) = 1/x$ og $q(x) = e^x$. Da $x > 0$ får vi at $\mu(x) = \ln x$ og $e^{\mu(x)} = x$ slik at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy] = xe^x.$$

Integrasjon med hensyn på x gir så

$$xy = \int xe^x\,\mathrm{d}x + C.$$

Det vil si,

$$y = \frac{1}{x}\left(\int xe^x\,\mathrm{d}x + C\right)$$

der $x > 0$.

Altså er

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\int xe^x\,\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}\left(xe^x - e^x + C\right)$$

der den siste likheten fremkommer ved delvis integrasjon. Innsatt for $y(1) = 4$ får vi at $C = 4$. Dermed er

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + 4}{x}.$$

3 Observer at $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Polynomdivisjon gir at

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-1}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-1}{(x+2)(x-1)}.$$

Delbrøkoppspalting gir at

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right).$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 \left(x-1+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{x+2}+\frac{2}{x-1}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\left(7\ln|x+2| + 2\ln|x-1|\right)\right]_2^4 \\ &= 4 + \frac{1}{3}\left(7\ln 6 + 2\ln 3\right) - \frac{7}{3}\ln 4 \\ &= 4 + 3\ln 3 - \frac{7}{3}\ln 2\end{aligned}$$

der den siste likheten fremkommer ved å utnytte at $\ln 6 = \ln 3 + \ln 2$.

4 Dersom h er kontinuerlig i $x = 0$ må $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$. Fra observasjonen om at $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + O(x^6)$ følger det at

$$h(x) = \frac{1}{4!} + O(x^2).$$

Det gir at

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4!} + O(x^2)\right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Altså må $h(0) = 1/24$ for at h skal være kontinuerlig i $x = 0$.

5 Arealet av rotasjonsflaten er gitt ved

$$\begin{aligned}A &= 2\pi\int_0^8 |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left(\int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int_4^8 \sqrt{8-x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}(8-x)^{-1/2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi\left(\int_0^4 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + \int_4^8 \sqrt{\frac{33}{4}-x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi\left(\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_0^4 + \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{33}{4}-x\right)^{3/2}\right]_4^8\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(17^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$

6 La $g(x) = 1/(1-x)$. Da er

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

for $-1 < x < 1$, som igjen gir at

$$g(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

for $-1 < x < 1$. Leddvis integrasjon gir så

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

for $-1 < x < 1$. Altså er

$$f(x) = \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(2x)^{n+1}$$

for $-1/2 < x < 1/2$, som betyr at taylorrekken til f rundt 0 har konvergensradius $1/2$.

$\boxed{7}$ Vi ser først på de kritiske punktene til h. I vårt tilfelle er

$$h'(x) = \frac{x-1}{|x-1|} + 2x + 2,$$

som gir at $h'(x) = 0$ har løsning $x = -1/2$.

Fra uttrykket for $h'(x)$ ser vi at $x = 1$ er et singulært punkt.

Da $h(-2) = 3, h(-1/2) = 3/4, h(1) = 3$ og $h(2) = 9$, tar h sitt absolutte maksimum i $x = 2$, og sitt absolutte minimum i $x = -1/2$.

$\boxed{8}$ Observer at f er en kontinuerlig funksjon, der $f(-1) = e+5+2 = e+7 > 0$ og $f(1) = e-5+2 = e-3 < 0$. Skjæringssetningen gir så at det finnes et tall $c \in (-1, 1)$ slik at $f(c) = 0$.

$\boxed{9}$ **a)** Formlike trekanter gir at

$$\frac{b}{5} = \frac{4-h}{4}$$

slik at $b = (20 - 5h)/4$. Arealet som funksjon av h er så gitt ved

$$A(h) = hb = \frac{20h - 5h^2}{4} = 5h\left(1 - \frac{1}{4}h\right).$$

b) Vi ønsker å finne h slik at $A(h)$ er størst mulig. I vårt tilfelle er

$$A'(h) = 5 - \frac{5}{2}h$$

slik at $A'(h) = 0$ har løsning $h = 2$. Vi har ingen singulære punkter og endepunktene er uinteressante. Det maksimale arealet (i m^2) til fronten er så gitt ved

$$A(2) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 5.$$

1 Ettersom

$$\frac{x+3}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

følger det at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\infty} \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx &= \int_{-1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x+2)-\frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(b+2)-\frac{1}{b+2}+1\right).\end{aligned}$$

Siden

$$\lim_{b\to\infty}\ln(b+2)=\infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b+2}=0$$

får vi at

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx = \infty.$$

Altså divergerer integralet.

2 **a)** La $f(x) = \arctan x - 2x + 4$ for $x \in \mathbb{R}$. Siden f er en kontinuerlig funksjon og $f(3) < 0 < f(0)$, gir skjæringssetningen at $f(x) = 0$ har minst én løsning når $x \in (0,3)$. Observer at

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2.$$

Da $0 < 1/(1+x^2) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, må $f'(x) < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er f en strengt avtagende funksjon. Dermed har $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning for $x \in (0,3)$. Siden f er strengt avtagende for alle $x \in \mathbb{R}$ kan ikke $f(x) = 0$ ha løsninger for x utenfor $(0,3)$. Dermed har $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning for $x \in \mathbb{R}$.
Newtons metode gir i vårt tilfelle at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan x_n - 2x_n + 4}{1/(x_n^2+1)-2}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$ Innsatt for $x_0 = 2$ får vi at

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{\arctan 2 - 4 + 4}{1/(2^2+1)-2} = 2 + \frac{5\arctan 2}{9} \approx 2.6151 \\ x_2 &\approx 2.6151 - \frac{\arctan 2.6151 - 5.2302 + 4}{1/(2.6151^2+1)-2} \approx 2.6019.\end{aligned}$$

b) For at kurven $e^{y/4}\arctan x + 4 - ye^x = 2x\cos\pi y$ skal skjære x-aksen må $y = 0$. Innsatt for $y = 0$ får vi $\arctan x + 4 = 2x$. Det vil si, $\arctan x + 4 - 2x = 0$. Fra **a)** vet vi at $\arctan x + 4 - 2x = 0$ har nøyaktig én løsning for $x \in \mathbb{R}$. Altså skjærer kurven x-aksen nøyaktig én gang.
For å finne ligningen for tangenten til kurven i punktet $(0,4)$ bruker vi implisitt derivasjon med hensyn på x. I vårt tilfelle får vi at

$$\frac{1}{4}e^{y/4}\arctan x\frac{dy}{dx} + \frac{e^{y/4}}{1+x^2} - e^x\left(\frac{dy}{dx}+y\right) = 2\cos\pi y - 2\pi x\frac{dy}{dx}\sin\pi y.$$

Innsatt for $(x, y) = (0, 4)$ får vi at

$$e - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} - 4 = 2,$$

slik at

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} = e - 6.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(0, 4)$ er så gitt ved

$$y - 4 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} x = (e - 6)x,$$

det vil si,

$$y = (e - 6)x + 4.$$

$\boxed{3}$ Siden $|\cos(1/(x-1))| \leq 1$ for alle $x \neq 1$, har vi at

$$-\sin^2(x-1) \leq \sin^2(x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq \sin^2(x-1)$$

for alle $x \neq 1$. Da

$$\lim_{x\to 1} \pm\sin^2(x-1) = 0$$

gir skviseregelen at

$$\lim_{x\to 1} \sin^2(x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

For at f skal være kontinuerlig i $x = 1$ så må $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ hvilket er oppfylt når $L = f(1) = 0$. Altså er f kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$ når $L = 0$.

$\boxed{4}$ Legg merke til at $f(\pi/3) = e^{5/2+1/2} = e^3$, slik at $f^{-1}(e^3) = \pi/3$. Siden

$$f'(x) = -e^{5/2+\cos x}\sin x$$

har vi at

$$(f^{-1})'(e^3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e^3))} = \frac{1}{f'(\pi/3)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-3}.$$

$\boxed{5}$ La $y_1 = 4 - x^2$ og $y_2 = 2 - x$. For å finne skjæringspunktene ser vi på $y_1 = y_2$, det vil si, $4 - x^2 = 2 - x$. Det svarer til $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$ som har løsning $x = -1$ og $x = 2$. Videre så er $y_1 \geq y_2$ for alle $x \in [-1, 2]$. Skivemetoden gir så at volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{2}\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx = \pi\int_{-1}^{2}\left(16 - 8x^2 + x^4 - (4 - 4x + x^2)\right)dx \\ &= \pi\int_{-1}^{2}\left(12 + 4x - 9x^2 + x^4\right)dx = \pi\left[12x + 2x^2 - 3x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \frac{108}{5}\pi. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Innsatt for $x = \pi/2$ får vi at

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\pi/2} 2t\sin(\pi - t)\,dt = [2t\cos(\pi - t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\cos(\pi - t)\,dt \\ &= [2\sin(\pi - t)]_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

Analysens fundamentalsetning gir at $f'(x) = 2x\sin(\pi - x)$ slik at

$$f''(x) = 2\sin(\pi - x) - 2x\cos(\pi - x).$$

Dermed er $f'(\pi/2) = \pi$ og $f''(\pi/2) = 2$.
Taylor-polynomet til f av grad 2 om punktet $a = \pi/2$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\pi/2)}{k!} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 - \frac{\pi^2}{4} + x^2. \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (i) La $a_n = (-1)^{n+1}/(n + \ln n)$. Siden $n + 1 + \ln(n+1) > n + \ln n$ for alle $n \geq 1$ har vi at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n + 1 + \ln(n+1)} < \frac{1}{n + \ln n} = |a_n|$$

for alle $n \geq 1$, har vi at leddene er avtagende. Observer at $a_n a_{n+1} < 0$ for alle $n \geq 1$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Da vi i tillegg vet at leddene avtagende, gir test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \ln n}$$

er konvergent.
For å avgjøre om rekken er absolutt konvergent eller betinget konvergent må vi se på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

og hvorvidt den konvergerer eller divergerer. Siden $n + \ln n < 2n$ for $n \geq 1$ har vi at

$$\frac{1}{n + \ln n} > \frac{1}{2n}$$

for alle $n \geq 1$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er den harmoniske rekken som vi vet at divergerer (ved for eksempel integraltesten), gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)$ divergerer.
Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \ln n}$$

betinget konvergent.

(ii) Siden $n - 1 < n$ for alle $n \geq 2$ har vi at

$$\frac{n-1}{n^4} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

for alle $n \geq 2$, gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^4}$$

konvergerer da $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^3$ konvergerer (dette er en p-rekke, med $p = 3 > 1$ som vi vet at konvergerer ved for eksempel integraltesten).

La $a_n = (n-1)/n^4$. Siden $a_n > 0$ for alle $n \geq 2$ (det vil si, $|a_n| = a_n$ for alle $n \geq 2$) må

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^4}$$

være absolutt konvergent.

(iii) Siden $f(x) = \arctan x$ er en strengt voksende funksjon for alle $x \in \mathbb{R}$, og $f(0) = 0$, må $n^2 - \arctan n < n^2$ for alle $n \geq 0$. Det gir at

$$\frac{3n}{n^2 - \arctan n} > \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

for alle $n \geq 1$. Sammenligningstesten gir så at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2 - \arctan n}$$

divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} 3/n$ divergerer.

$\boxed{8}$ La $f(x) = \sin x^2$. Siden $f'(x) = 2x \cos x^2$ er buelengden til grafen til $y = f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 1$ gitt ved

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 \cos^2 x^2}\, dx.$$

La $F(x) = \sqrt{1 + 4x^2 \cos^2 x^2}$. I vårt tilfelle har vi fire delintervaller samt at $a = 0$ og $b = 1$ slik at $h = (1-0)/4 = 0.25$.

Simpsons metode med fire delintervaller gir så tilnærmingen $S_4 \approx I$, der

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{h}{3}\left(F(0) + 4F(0.25) + 2F(0.5) + 4F(0.75) + F(1)\right) \\ &\approx \frac{0.25}{3}\left(1 + 4 \cdot 1.1176 + 2 \cdot 1.3924 + 4 \cdot 1.6156 + 1.4723\right) \approx 1.3492. \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Vi observerer at

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \frac{1}{x(x^2 - 2x + 2)} = \frac{1}{x\left((x-1)^2 + 1\right)}.$$

Delbrøkoppspalting gir så at

$$\frac{1}{x\left((x-1)^2 + 1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{(x-1) - 1}{(x-1)^2 + 1}\right).$$

Den gitte differensialligningen er en separabel og lineær første ordens differensialligning. Vi kan løse den ved for eksempel separasjon av variabler eller integrerende faktor.

Løsning ved separasjon av variabler gir at

$$\begin{aligned} \ln|y - 1| &= \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{(x-1) - 1}{(x-1)^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x-1)\right) + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

(der vi har brukt at $|x| = x$ for $x > 0$) slik at

$$y(x) - 1 = \frac{K\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}, \qquad K = \pm e^{C/2}.$$

Det vil si,

$$y(x) = 1 + \frac{K\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}.$$

Fra $y(1) = 0$ får vi at $y(1) = 1 + K = 0$, det vil si, $K = -1$.
Altså er

$$y(x) = 1 - \frac{\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}.$$

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 8. august 2017

1 Legg merke til at $x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2) = x((x-1)^2 + 1)$. Delbrøkoppspalting gir så at

$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+2x} = \frac{3x^2+2}{x((x-1)^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2x+2}{(x-1)^2+1}$$

slik at

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{(x-1)^2+1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x-2}{(x-1)^2+1} + \frac{4}{(x-1)^2+1}\right)dx \\ &= \ln|x| + \ln(x^2-2x+2) + 4\arctan(x-1) + C.\end{aligned}$$

2 Taylorpolynomet til f av grad 3 om $a = 0$ er gitt ved

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(x)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)x^3.$$

I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^4} - 6\pi\cos\pi x \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^4) - 8x^4}{(1+x^4)^2} + 6\pi^2\sin\pi x = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} + 6\pi^2\sin\pi x \\ f'''(x) &= \frac{-24x^3(1+x^4)^2 - 8x^3(2-6x^4)(1+x^4)}{(1+x^4)^4} + 6\pi^3\cos\pi x\end{aligned}$$

slik at $f'(0) = -6\pi$, $f''(0) = 2$ og $f'''(0) = 6\pi^3$. Siden $f(0) = 0$ har vi at

$$P_3(x) = x(\pi^3x^2 + x - 6\pi).$$

3 **a)** Legg merke til at

$$x^c\ln x = \frac{\ln x}{x^{-c}}$$

er en ubestemt form av typen «∞/∞» når $x \to 0+$ gitt at $c > 0$.
L'Hôpitals regel gir så at

$$\lim_{x\to 0+} x^c\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-c}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^{-1}}{cx^{-c-1}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^c}{c} = 0.$$

b) Delvis integrasjon med $u(x) = \ln x$ og $v'(x) = x^a$ gir at

$$\int x^a\ln x\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \frac{1}{a+1}\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right) + C.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^a\ln x\,dx &= \lim_{\alpha\to 0+}\left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right)\right]_\alpha^1 \\ &= \lim_{\alpha\to 0+}\left(-\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}\alpha^{a+1}\ln\alpha\right) = -\frac{1}{(a+1)^2}\end{aligned}$$

der den siste likheten følger fra grenseverdien vi fant i **a)**.
Når $a = -1$ så er

$$\int_0^1 x^{-1} \ln x \, dx = \int_\infty^1 u \, du = \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_\beta^1 = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2}(1 - \beta^2) = -\infty$$

der den første likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = \ln x$.
Altså divergerer integralet når $a = -1$.

$\boxed{4}$ Sylinderskallmetoden gir at volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{3x}{2\sqrt{x^3+3}} + 3 - 1 \right) dx = 3\pi \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} \, dx + 4\pi \int_1^2 x \, dx \\ &= \pi \int_4^{11} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du + 6\pi = \pi \left[2\sqrt{u} \right]_4^{11} + 6\pi = 2\pi(1 + \sqrt{11}) \end{aligned}$$

der den tredje likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = x^3 + 3$.

$\boxed{5}$ Dette er en første ordens lineær differensialligning med $p(x) = 4/x$ og $q(x) = 5e^{x^5+1} + 15$. La $\mu(x)$ være en antiderivert til $p(x)$, det vil si,

$$\mu(x) = \int p(x) \, dx = \int \frac{4}{x} \, dx = 4 \ln x = \ln x^4$$

hvor vi antar $x > 0$. Det gir at $e^{\mu(x)} = e^{\ln x^4} = x^4$, slik at

$$\frac{d}{dx}\left[x^4 y \right] = (5e^{x^5+1} + 15)x^4.$$

Integrasjon med hensyn på x gir så

$$x^4 y = \int (5e^{x^5+1} + 15)x^4 \, dx = e^{x^5+1} + 3x^5 + C$$

slik at den generelle løsningen til differensialligningen er

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 + C}{x^4}$$

for $x > 0$.
Fra $y(1) = 3$ får vi at

$$y(1) = e^2 + 3 + C = 3$$

slik at $C = -e^2$. Altså er løsningen til initialverdiproblemet gitt ved

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 - e^2}{x^4}$$

for $x > 0$.

$\boxed{6}$ La $g(x) = f(x) - x$. Vi ønsker å vise at det eksisterer minst én $x \in [0,1]$ slik at $g(x) = 0$. Hvis $g(0) = 0$ eller $g(1) = 0$ er det ingenting å vise. Anta derfor at $g(0) \neq 0$ og at $g(1) \neq 0$. Da følger det fra antagelsen om at $0 \leq f(x) \leq 1$ for $0 \leq x \leq 1$ at $g(0) > 0$ og at $g(1) < 0$. Siden g er en kontinuerlig funksjon følger det fra skjæringssetningen at det eksisterer (minst én) $c \in (0,1)$ slik at $g(c) = 0$. Altså eksisterer det minst én $x \in [0,1]$ slik at $g(x) = 0$.

$\boxed{7}$ La $a_n = (-1)^n/(2n+1)$. Siden

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+2}|}{|a_n x^{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x| = |x|$$

gir forholdstesten at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

konvergerer dersom $\rho = |x| < 1$. Altså er konvergensradien $R = 1$.

La så $x = -1$. Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

La $a_n = 1/(2n+1)$ og la $b_n = 1/(n+1)$. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

og den harmoniske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergerer (som følger ved for eksempel integraltesten), gir grensesammenligningstesten at

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

divergerer.

La så $x = 1$. Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Dette er en alternerende rekke der leddene er gitt ved $a_n = (-1)^n/(2n+1)$. Siden $2n+3 > 2n+1$ for alle $n \geq 0$ følger det at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |a_n|$$

for alle $n \geq 0$. Da vi også har at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ følger det fra test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konvergerer.

Altså konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

for $x \in (-1, 1]$.

$\boxed{8}$ **a)** Taylorrekken om $a = 0$ til $f(x) = e^x$ er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$e^{-x^2/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Buelengden til grafen til $y = F(x)$ fra $x = 0$ til $x = 1$ er gitt ved

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + F'(x)^2}\, dx.$$

Analysens fundamentalsetning gir at

$$F'(x) = \sqrt{e^{-x^2/2} - 1}$$

slik at

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + F'(x)^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2/4}\, dx.$$

Siden

$$e^{-x^2/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ har vi at

$$s = \int_0^1 e^{-x^2/4}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}.$$

Altså har vi uttrykt s som en alternerende rekke. La

$$a_n = \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

og observer at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ samt at $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 4^n n!(2n+1)$ for alle $n \geq 0$, slik at $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle $n \geq 0$. Test for alternerende rekker gir så at

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

konvergerer.

La $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$. Feilestimatet for alternerende rekker gir så at

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!(2n+3)}.$$

For å oppnå ønsket nøyaktig i vår tilnærming til s må $|a_{n+1}| < 0.0005$, det vil si, $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 2000$. Fra tabellen

n	0	1	2
$4^{n+1}(n+1)!(2n+3)$	12	160	2688

ser vi at $|a_{2+1}| = |a_3| < 0.0005$.

Dermed er

$$s_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} = \frac{443}{480}$$

en tilnærming til s med feil garantert mindre enn 0.0005.