

Velkommen til
oversiktsforelesninger
i Matematikk 1

med
Gereon Quick

Vi diskuterer:
Differensialligninger
(kap. 7.9, 19.1–19.3)

forelesningsuke

47

Nøkkelbegreper uke 47: Differensialligninger

- Førsteordens differensialligninger
- Separable differensialligninger
- Integrerende faktor
- Eulers metode
- Eksistens og entydighet

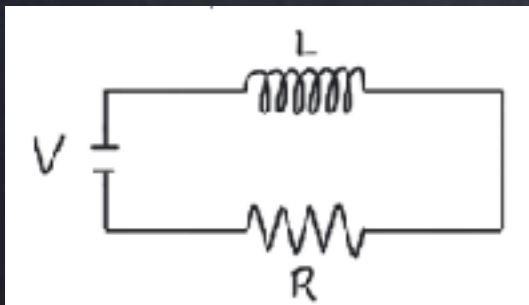
- Førsteordens differensialligninger:

Definisjon: En **differensialligning** er en ligning på formen

$$y'(x) = f(x, y).$$

En **løsning** på et intervall I er en **funksjon** $y(x)$ som er deriverbar på hele I og tilfredsstiller $y'(x) = f(x, y(x))$ for alle x i I .

- Eksempler:
 - $y' = ky$ med k konstant exponentiell vekst
 - $y' = k(y - T)$ med k konstant Newtons avkjølingslov
 - $y' = ky \left(1 - \frac{y}{L}\right)$ med $k, L > 0$ konstanter logistisk vekst



- $L \frac{dI}{dt} + RI = V$ med $L, R > 0$ konstanter RL -krets

- Førsteordens differensialligninger:

Definisjon: Et **initialverdiproblem** består av en differensialligning

$$y'(x) = f(x, y) \text{ og en initialbetingelse } y(x_0) = y_0.$$

En **løsning** på et intervall I med $x_0 \in I$ er en løsning $y(x)$ av ligningen $y'(x) = f(x, y)$ på I slik at $y(x_0) = y_0$.

- Eksempler:
 - $y' = y$ og $y(0) = 1$.
 - $y' + x^2y = x^2$ og $y(0) = 2$.
 - $y = (x + 1)(y' - x)$ og $y(0) = 4$.
 - $y' = \frac{2y}{x(x^2 + 1)}$ og $y(1) = 1$.

- Seprable differensialligninger:

En førsteordens differensialligning kalles **separabel** dersom den kan skrives på formen

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

der $h(x)$ bare avhenger av x og $g(y)$ bare av y .

- $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$ Anta at $g(y) \neq 0$:
vi integrer på begge sidene

separasjon
av variabler

$$\frac{1}{g(y)} dy = h(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

vi får en ligning
på formen

$$G(y) = H(x) + C$$

der $G'(y) = 1/g(y)$ og $H'(x) = h(x)$

nå løser vi ligningen for y og bruker
initialverdien for å bestemme konstanten C

- Lineare differensialligninger:

En førsteordens differensialligning kalles **linear** dersom den kan skrives på formen

vi antar at begge er
kontinuerlige

$$y' + p(x)y = q(x)$$

der $p(x)$ og $q(x)$ er kjente funksjoner.

- la $\mu(x)$ være en antiderivert av $p(x)$

- vi ganger begge sider med $e^{\mu(x)}$

produktregel for
derivasjon

$$\frac{d}{dx} (e^{\mu(x)}y) = e^{\mu(x)} \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y \right) = e^{\mu(x)}q(x)$$

vi integrerer på begge sidene

$$e^{\mu(x)}y = \int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

dermed får
vi løsningen

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

Merk: $e^{\mu(x)}$ kalles en
integrerende faktor

- Eulers metode: <https://s.ntnu.no/tma4100>

Gitt et initialverdiproblem $y' = f(x, y)$ og $y(x_0) = y_0$:

- **Lineær** approksimasjon i (x_0, y_0) :

$$y(x) \approx y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

for x i $[x_0, x_0 + h]$

vi velger en skrittlengde h
og gjentar prosessen...

- **Lineær** approksimasjon i (x_1, y_1)

med $x_1 = x_0 + h$ og $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$:

$$y(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1)$$

for x i $[x_1, x_1 + h]$

∴ vi gjentar prosessen...

- **Lineær** approksimasjon i (x_n, y_n)

med $x_n = x_0 + n \cdot h$ og

$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$:

$$y(x) \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x - x_n)$$

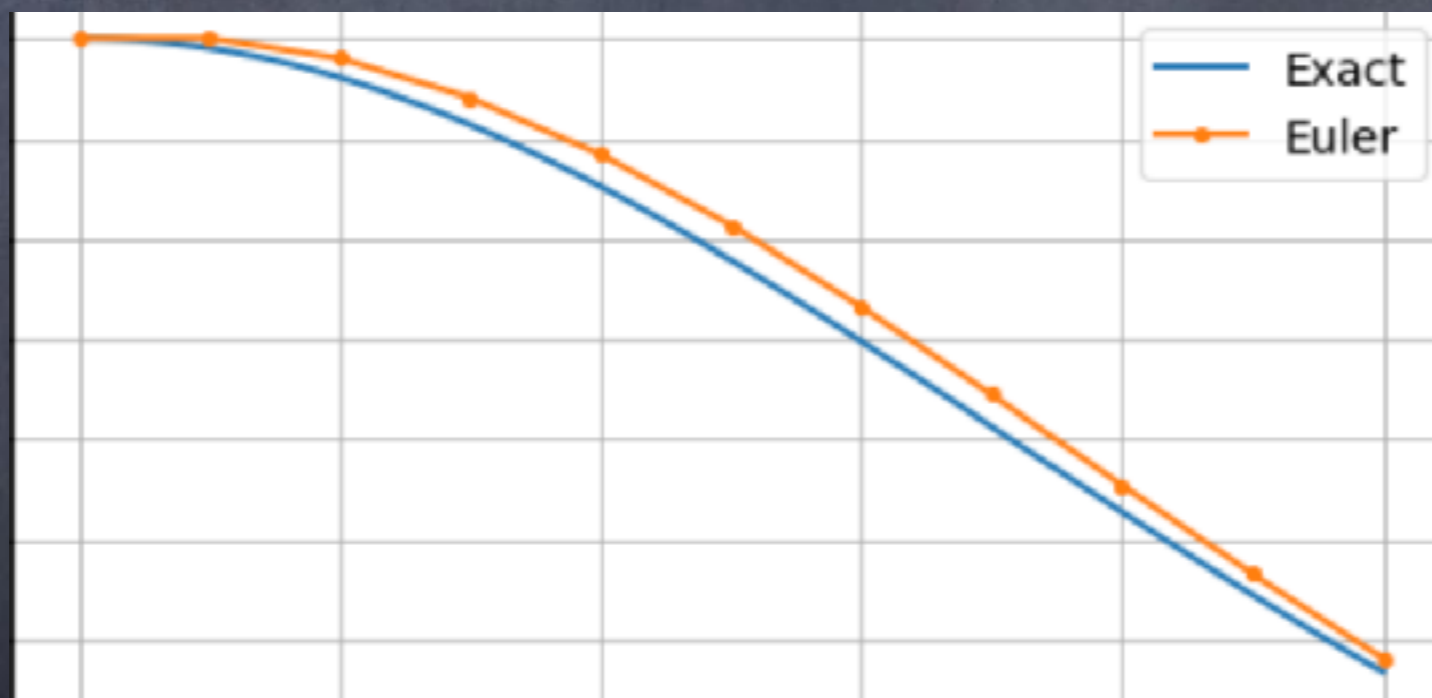
for x i $[x_n, x_n + h]$

- Eulers metode:

<https://s.ntnu.no/tma4100>

- gå til nettsiden for å bruke koden i python selv...

Eksempel: Initialverdiproblem $y' = -2xy$ og $y(0) = 1$



- Eksakt løsning: $y(x) = e^{-x^2}$

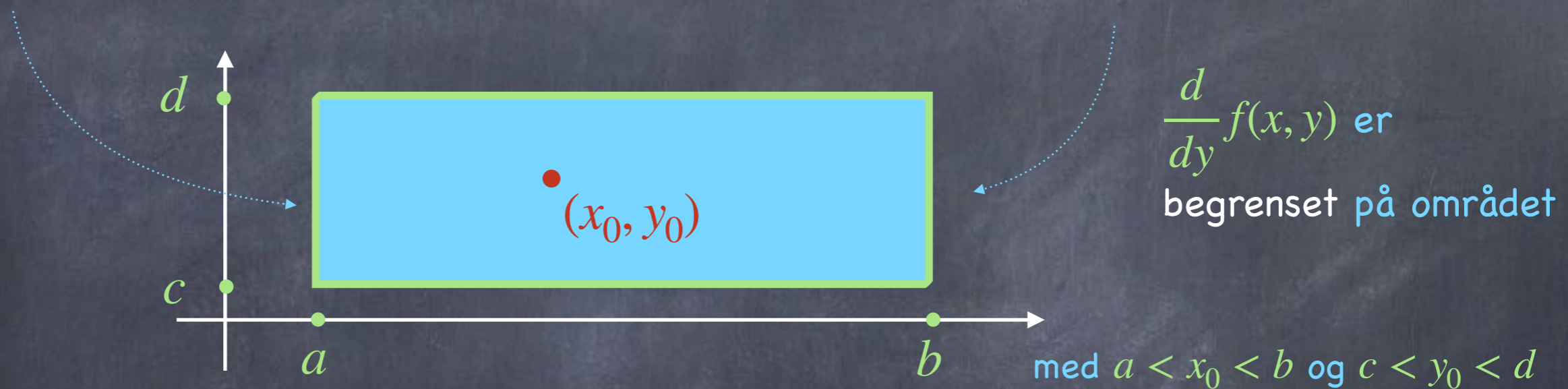
- Eksistens og entydighet: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Anta at $f(x, y)$ tilfredsstillter:

- $f(x, y)$ er **kontinuerlig** for alle x i $[a, b]$ og alle y i $[c, d]$.

- $\frac{d}{dy}f(x, y)$ er **kontinuerlig** for alle x i $[a, b]$ og alle y i $[c, d]$.

hold x konstant og deriver mht y



- Da finnes det et $\delta > 0$ og en **løsning** $y = y(x)$ for $y'(x) = f(x, y)$ og $y(x_0) = y_0$ på intervallet $(-\delta + x_0, x_0 + \delta)$.
- Videre er $y = y(x)$ den **eneste** løsningen av initialverdiproblemet.

- Ikke alle løsninger er entydige:

Vi ser på initialverdiproblemet $y'(x) = 3y^{2/3}$ og $y(0) = 0$:

- Det finnes minst **to** løsninger for problemet:

$$y(x) = x^3 \text{ og } y(x) = 0.$$

- Dette skjer fordi $\frac{d}{dy} (3y^{2/3}) = \frac{2}{y^{1/3}}$ er **ubegrenset** nærme 0.

Med andre ord **vi mister kontroll**
over funksjonen $y(x)$ rundt 0.

- Picarditerasjoner:

Anta at $y(x)$ er en **løsning** for initialverdiproblemet

$$y' = f(x, y) \text{ og } y(x_0) = y_0.$$

Da tilfredsstiller $y(x)$ også $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$

vi starter med $y_0(x) = y_0$ og setter: $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$

⋮

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

⋮

Denne iterasjonsprosessen kalles **picarditerasjoner**.

- Vi får en følge av funksjoner $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

- Vi finner **løsningen** $y(x)$ som $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$