

**Avstanden mellom punkter i planet.** Avstanden mellom to punkter  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$  i planet er  $D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

**Ligningen til en sirkel.** Ligningen til en sirkel med sentrum  $(h, k)$  og radius  $a \geq 0$  er  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ .

**Annengradsligninger.** Løsningene til annengradsligningen  $Ax^2 + Bx + C = 0$  der  $A, B$ , og  $C$  er konstanter og  $A \neq 0$ , er gitt ved

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

gitt at  $B^2 - 4AC \geq 0$ .

**Trigonometriske identiteter.** Hvis  $s$  og  $t$  er to reelle tall, så gjelder:

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t & (3) \quad \cos(s-t) &= \cos s \cos t + \sin s \sin t \\ (2) \quad \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t & (4) \quad \sin(s-t) &= \sin s \cos t - \cos s \sin t \end{aligned}$$

**Tangentlinjer.** Hvis  $f$  er en funksjon som er deriverbar i et punkt  $x_0$ , så er ligningen for tangentlinjen til  $y = f(x)$  gitt ved  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Regneregler for derivasjon.** Hvis  $f$  og  $g$  er deriverbare i  $x$ , så gjelder:

$$\begin{aligned} (1) \quad (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ (2) \quad (f/g)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{gitt at } g(x) \neq 0) \end{aligned}$$

**Kjerneregelen.** Hvis  $g$  er deriverbar i  $x$  og  $f$  er deriverbar i  $g(x)$ , så er

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

**Derivasjon av trigonometriske funksjoner.**

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (2) \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (3) \quad \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**Sekantsetningen (middelverditeoremet).** Hvis en funksjon  $f$  er kontinuertlig på intervallet  $[a, b]$  og deriverbar på intervallet  $(a, b)$ , så eksisterer  $c \in (a, b)$  slik at  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

**Derivasjon av inverse trigonometriske funksjoner.**

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

**Hyperbolske funksjoner.**

$$(1) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

**Derivasjon av hyperbolske funksjoner.**

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (2) \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

**Newtons metode.**  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Taylorpolynom.** Taylorpolynomet til  $f$  av grad  $n$  om punktet  $a$  er polynomet

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Hvis  $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , så er  $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$  for en  $s$  mellom  $a$  og  $x$ .

**Noen kjente Taylorrekker om  $a = 0$ .**

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1) & (4) \quad \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{for alle } x) \\ (2) \quad \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1) & (5) \quad e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{for alle } x) \\ (3) \quad \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{for alle } x) \end{aligned}$$

**Noen elementære integraler.**

$$\begin{aligned} (1) \quad \int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad \text{for } r \neq -1 & (5) \quad \int \cos(ax) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax) + C \\ (2) \quad \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C & (6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin(x/a) + C \quad \text{for } a > 0 \\ (3) \quad \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C & (7) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C \\ (4) \quad \int \sin(ax) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax) + C \end{aligned}$$

**Delvis integrasjon.**

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

**Trapesmetoden.** La  $h = (b-a)/n$ ,  $y_i = f(x_i) = f(a+ih)$  for  $i = 0, 1, \dots, n$ . Da er

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

og for  $f$  to ganger deriverbar, hvor  $|f''(x)| \leq K$  for alle  $x \in [a, b]$ ,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}.$$

**Simpsons metode.** La  $h = (b-a)/2n$ ,  $y_i = f(x_i) = f(a+ih)$  for  $i = 0, 1, \dots, 2n$ . Da er

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{2n} = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

og for  $f$  fire ganger deriverbar, hvor  $|f^{(4)}(x)| \leq K$  for alle  $x \in [a, b]$ ,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n} \right| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180(2n)^4}.$$

**Eulers metode.**  $x_{n+1} = x_n + h$ ,  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ .