Anbefalte oppgaver uke 43

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ **a)** Vis at ligningen

$$x = \cos(x)$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem desimalers nøyaktighet ved bruk av Newtons metode.

b) Finn (tilnærmet) de punktene på kurven

$$y^2 + 2\sin(x) = 2$$

som ligger nærmest origo.

$\boxed{2}$ En følge er definert rekursivt på følgende måte:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Finn en funksjon f slik at følgen $\{x_n\}$ fremkommer ved bruk av Newtons metode for løsning av $f(x) = 0$. Vis deretter at følgen $\{x_n\}$ konvergerer. Hvilket tall konvergerer følgen mot?

$\boxed{3}$ **a)** La $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Finn største og minste verdi av

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4 + 3)}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\, dx.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra **a)**.
Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet over, uansett antall delintervaller.

$\boxed{4}$ Bruk Simpsons metode til å estimere verdien av integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

med en feilmargin som er mindre enn 10^{-3}.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Finn en tilnærming til $\sqrt{3}$ ved hjelp av Newtons metode.

$\boxed{2}$ Løs $\cos(x) = x^2$. Hvor mange løsninger finnes det?

$\boxed{3}$ Finn maksimum og minimum til $g(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$.

$\boxed{4}$ (Høst 2016.) Bruk Simpsons metode med fire delintervall til å finne tilnærminga S_4 til buelengda til grafen til $y = \sin\left(x^2\right)$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

$\boxed{5}$ Finn den faktiske feilen i approksimasjonen

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx T_1$$

og bruk dette til å vise at konstanten 12 i estimatet i Teorem 4, side 376, ikke kan forbedres.

$\boxed{6}$ Finn den faktiske feilen i approksimasjonen

$$\int_0^1 x^4\,dx \approx S_2$$

og bruk dette til å vise at konstanten 180 i estimatet i Teorem 5, side 381, ikke kan forbedres.

$\boxed{7}$ Vis at

$$\int_0^1 x^3\,dx = S_2.$$

$\boxed{8}$ (Høst 2017.) Vis at ligningen

$$\arctan(x) = 3e^{-x} + 1$$

har nøyaktig én løsning $x = r$.

Bruk Newtons metode med to iterasjoner og $x_0 = 3$ til å finne en tilnærming til r.

$\boxed{9}$ Oppgave 2 konteksamen 2023