

Anbefalte oppgaver uke 42

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 Et vannkar dannes ved å rotere kurven

$$y = \frac{x^3}{4}, \quad x \geq 0$$

om y -aksen. Finn volumet av karet opp til høyde h .

- 2 Et 45° hakk skjæres inn til midten av en sylindrisk kubbe som er 40 cm tykk, slik som i Figur 7.20 på side 406 i læreboken. Den ene overflaten til hakket er vinkelrett på aksene som går gjennom kubben. Hvor mye tre (i volum) ble fjernet ved å lage dette hakket?

- 3 La $f(x)$ være en ikke-negativ funksjon som er deriverbar med kontinuerlig derivert for $x \geq 1$. Buelengden til kurven $y = f(x)$ fra $x = 1$ til $x = u$ er gitt ved en funksjon $H(u)$. Bestem funksjonen f dersom

$$H(u) = \frac{u^3}{3} + u - \frac{4}{3} \quad \text{og} \quad f(1) = 0.$$

- 4 I en kullgruve heises det utgravde kullet opp til overflaten ved hjelp av en stor bøtte og en vinsj. Gruven er 500 meter dyp og kabelen med bøtta når helt til bunnen. Anta at bøtta fylt med kull veier 1300 kilo, og at kabelen veier 600 kilo.

- a) Hva er arbeidet som kreves for å løfte bøtta til midten av gruveen?

Når bøtta når midten fylles det på med 200 kg ekstra kull.

- b) Hva er det totale arbeidet gjort når bøtta når toppen?

- 5 Gabriels horn er legemet vi får om vi dreier grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, der $1 \leq x < \infty$, om x -aksen.

- a) Vis at Gabriels horn har endelig volum.

- b) Vis at Gabriels horn har uendelig overflate.

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 La S være området i xy -planet som er avgrensa av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$. Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie S om x -aksen. Bruk både sylinderskallmetoden og skivemetoden.

- 2 La R være området avgrenset av $y = x$ og $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

- a) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når R blir rotert om x -aksen.

- b) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når R blir rotert om y -aksen.

- 3 Et legeme er 6 meter høyt. Det horisontale tversnittet i en høyde z meter over grunnflata er et rektangel med lengde $2 + z$ meter og bredde $8 - z$ meter. Finn volumet av legemet.

- 4 Finn buelengden til kurven

$$y^2 = (x - 1)^3$$

fra $(1, 0)$ til $(2, 1)$.

- 5 Finn arealet av overflata som oppstår ved å rotere kurven

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

om y -aksen.

- 6 (Høst 2016.) La A være området i xy -planet som er avgrenset av kurvene

$$y_1 = 4 - x^2$$

$$y_2 = 2 - x.$$

Bestem volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie A om x -aksen.

- 7 (Kontinuasjoneksamen 2013.) La a og h være positive størrelser, og la A være området i 1. kvadrant avgrenset av parabolen $y = ax^2$, y -aksen og den horisontale linjen $y = h$. Området A roteres om y -aksen.

a) Området A roteres om y -aksen. Finn volumet til rotasjonslegemet.

b) Anta at rotasjonslegemet er fylt med vann som deretter tappes ut. I et gitt øyeblikk er vannhøyden 1 m, og vannet strømmer ut med en hastighet av 2 dm^3 pr. sekund. Hvis $a = \pi(\text{dm}^{-1})$, hvor raskt avtar vannhøyden i dette øyeblikket?

- 8 (Kontinuasjoneksamen 2018.) La A være området i xy -planet som er avgrenset av $y = \sqrt{x}$ og $y = x/2$. Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie A om linja $x = 4$.

- 9 Oppgave 4, eksamen høst 2022.