

Anbefalte oppgaver uke 40

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en riemannsum for f på intervallet $[0, 1]$. Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

- 2 a) Finn gjennomsnittsverdien \bar{f} av funksjonen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ på intervallet $[0, 2]$.
 b) Argumenter for at $f(c) = \bar{f}$ for en eller annen $c \in [0, 2]$.

- 3 Finn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin(x)} e^{t^2} dt}{x + x^2}.$$

$$\left(\text{Vink: } \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x). \right)$$

- 4 a) I denne deloppgaven skal vi se på en uendelig tynn streng med massetetthet gitt ved $\sqrt{1 + \cos(x)}$ som er strekt ut langs x -aksen fra $x = 0$ til $x = \frac{\pi}{2}$. Regn ut massen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)} dx.$$

(Vink: $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta)$.)

- b) Regn ut integralet

$$\int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

- 5 Finn området avgrenset av den lukkede kurven $y^2 = x^4(2 + x)$ til venstre for y -aksen.

- 6 Regn ut

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(u^3) + 2) du.$$

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 På emnets temasider under "Integrasjon" finner dere denne videoen. Den løser en oppgave om arealet under en graf.

- 2 Regn ut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2n + 3i}{n^2}.$$

- 3 La P_n være en uniform partisjon av intervallet (det vil si, delintervallene er like store) $[0, 2]$ hvor delintervallene har lengde $2/n$. Regn ut $L(f, P_n)$ og $U(f, P_n)$ for funksjonen $f(x) = 1 - x$ på intervallet $[0, 2]$. Vis deretter at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n).$$

- 4 Finn gjennomsnittsverdien til $f(x) = e^{3x}$ på intervallet $[-2, 2]$.
- 5 På emnets temasider under "Integrasjon" finner dere denne videoen. Den løser en oppgave om substitusjon.
- 6 Regn ut

$$\int \frac{x^2}{2 + x^6} dx.$$

- 7 Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.
- 8 Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrensner et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av ett av disse.
- 9 (Høsten 2014.) Regn ut

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx.$$