

Anbefalte oppgaver uke 39

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 La $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2} + \cos(x)}.$$

Forklar hvorfor f er injektiv (én-entydig) og finn verdimengden til f . Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

- 2 Regn ut følgende grenseverdier:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_x(2) \qquad (ii) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t^2}}{t^2}$$

(Vink for (ii): Benytt substitusjonen $x = 1/t$).

- 3 Bruk formelen for inversderivasjon til å vise at

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

for $x \in \mathbb{R}$. Kan du vise dette på en annen måte?

- 4 La

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}.$$

Finn $f'(x)$.

(Vink: Logaritmisk derivert.)

- 5 Vis at

$$\operatorname{arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

og bruk dette til å finne den deriverte av $\operatorname{arsinh}(x)$.

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 La

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Vis at f har en invers og finn $f^{-1}(x)$ samt definisjons- og verdimengdene til f og f^{-1} .

- 2 La

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{for } x < 0, \\ \sqrt[3]{x} & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$$

Vis at f har en invers, og finn $f^{-1}(x)$.

- 3 La $f(x) = 1 + 2x^3$. Finn $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$.

- 4 Forenkle uttrykket

$$\log_{\pi}(1 - \cos(x)) + \log_{\pi}(1 + \cos(x)) - 2 \log_{\pi}(\sin(x)).$$

- 5 Vis at

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

- 6 Forenkle uttrykket

$$e^{2 \ln(\cos(x))} + \left(\ln \left(e^{\sin(x)} \right) \right)^2.$$

- 7 Deriver funksjonen

$$f(x) = \ln \left(\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right).$$

- 8 (Høsten 2013.) Sindre skal steke ribbe til julaften og følger en oppskrift han har funnet på Internett. Vi kan anta at temperaturen på kjøkkenet er 21 grader. I tillegg antar vi at Newtons avkjølingslov gjelder slik at temperaturen i ribba endres med en rate som er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom omgivelsene (kjøkken eller ovn) og ribba. Vi antar dessuten at temperaturen i Sindres ovn endrer seg momentant til ønsket temperatur når Sindre skrur på bryteren.

- a)** Sindre tar ribba ut av kjøleskapet en time før han skal steke den. Han stikker umiddelbart steketermometeret i ribba og leser av at temperaturen er 4 grader. Idet han setter ribba inn i ovnen, leser han av at temperaturen er 7 grader. Han lar så ribba steke i 30 minutter på 230 grader. Hva viser steketermometeret da?
- b)** Ifølge oppskriften skal Sindre nå skru temperaturen ned til 160 grader og ta ut ribba når termometeret viser 75 grader. Imidlertid har han nå ikke mer enn to timer til rådighet. Hva må han i stedet endre temperaturen til om julemiddagen skal bli ferdig i tide?

- 9 Finn den deriverte med hensyn på x av uttrykket $y = x^{\sqrt{x}}$. Hva skjer om du istedenfor deriverer uttrykket med hensyn på y ?