

Anbefalte oppgaver uke 45

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

1 Avgjør om de positive rekkene under konvergerer eller divergerer.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

2 a) Vis at rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)$$

konvergerer. Konvergerer rekken absolutt eller betinget?

b) La s betegne summen av rekken i a). Delsummen

$$s_9 = \sum_{n=2}^9 (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)$$

er en tilnærming til s . Hva kan du si om $s - s_9$ (feilen til tilnærmingen)?

3 Avgjør om påstandene under er sanne eller gale. Begrunn svaret med et bevis eller et moteksempel.

a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

b) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutt.

c) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ absolutt.

4 a) Vis ved induksjon at for $n = 1, 2, 3, \dots$ gjelder

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

b) Bruk a) til å vise at $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots = \ln(2)$. (Hint: Husk idéen bak integraltesten.)

Oppgaver med løsningsforslag

I oppgavene 1–3, avgjør om rekken konvergerer absolutt, betinget, eller divergerer.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3}$

4 Finn det minste tallet n som gjør at delsummen s_n tilnærmer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$$

med en feil mindre enn 0.001 i absoluttverdi.

Avgjør for hvilke x rekkene i oppgavene 5 og 6 konvergerer.

$$\boxed{5} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$$

$$\boxed{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$$

I oppgavene 7 og 8, finn en delsum s_n som tilnærmer rekken med en feil på mindre enn 0.001 i absoluttverdi.

$$\boxed{7} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

$$\boxed{8} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$$

(Hint: se side 517–518 og 523 i læreboken.)

$\boxed{9}$ Oppgave 7) ii) eksamen høst 2018