

Anbefalte oppgaver uke 35

Høsten 2023

Oppgaver til plenumsregning

1 Avgjør om følgende mengder er oppad og/eller nedad begrenset.

a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < |x - 3| < 7\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) < \frac{1}{2}\right\}$

2 Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente. I tilfelle en følge konvergerer, hva konvergerer den mot?

a) $\left\{\frac{n^2 - 1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (Her betyr $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$)

c) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3 Finn grenseverdiene:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{3n^2 - 10n + 3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)$

4 Vis at følgen $\left\{5 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot 5, det vil si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) = 5$$

ved å bruke definisjonen for konvergens av følger.

Oppgaver med løsningsforslag

1 Finn grenseverdiene:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1 + 5n^3}{6 - 7n^3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(n)}{n}$

- 2 Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er gitt ved $a_1 = 5/2$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$$

for alle $n \geq 1$. Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien.

- 3 **a)** La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge av reelle tall som konvergerer mot 0. Vis at følgen er begrenset.
b) Gi et eksempel på en følge av reelle tall som er begrenset, men ikke konvergent.
- 4 (Høsten 2020, oppgave 11.) Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er definert ved å la $a_1 = 10$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}$$

for alle $n \geq 1$.

Vis at følgen konvergerer og finn grensen.

(Vink: Vis at følgen er avtagende dersom $a_n \geq 1$ for alle n .)