Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Nytt tema: Integrasjon I (kap. 5.1–5.7 (2.10))

Forelesning uke 40

Nøkkelbegrep:

- Det bestemte integralet
- Middelverditeoremet for integraler
- Analysens fundamentalteorem
- Substitusjon
- Arealet mellom to kurver

Introduksjon

Noen regneregler for summer:

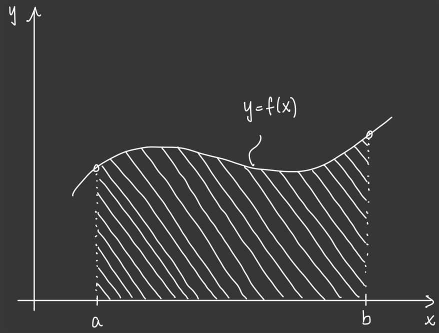
- $$\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m$$
- $$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$$
- $$\sum_{n=k}^{m} ca_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$$
- $$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$$

Merk:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)$$

Introduksjon

Vi skal undersøke hvordan man kan bestemme arealet under grafen til en generell funksjon:



Eksempel

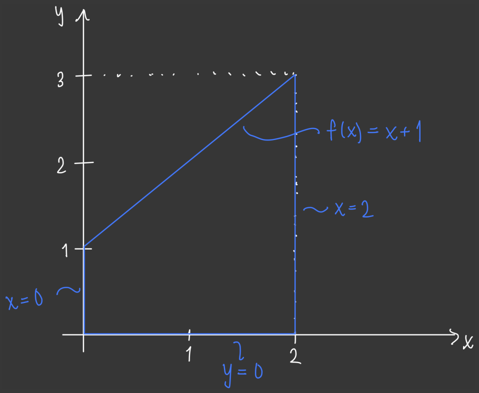
Finn arealet A av området som er begrenset av $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

Introduksjon

Vi skal undersøke hvordan man kan bestemme arealet under grafen til en generell funksjon:

Eksempel

Finn arealet A av området som er begrenset av $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

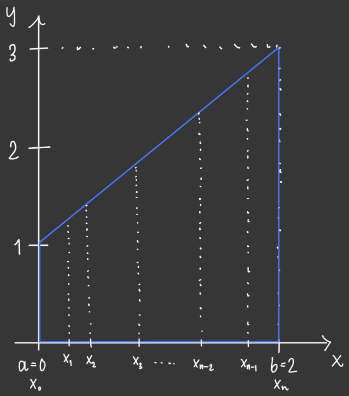


Introduksjon

Vi skal se på en fremgangsmåte som fungerer for en generell funksjon.
Del $[a, b]$ opp i n deler $[x_{i-1}, x_i]$ der

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Vi sier at $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ er en partisjon av $[a, b]$.

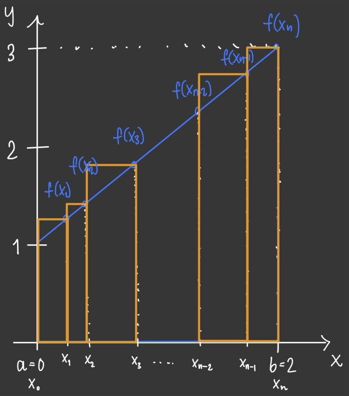


Introduksjon

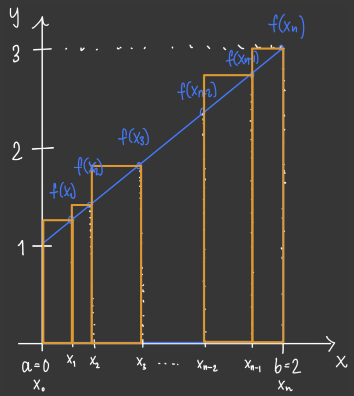
Hvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ har bredde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (\Delta x_1 = x_1 - x_0).$$

La så R_i være et rektangel med bredde Δx_i og høyde $f(x_i)$. Da er areal$(R_i) = f(x_i)\Delta x_i$.



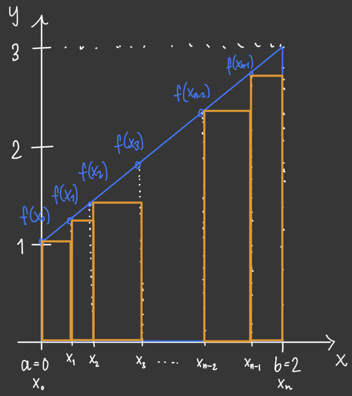
Introduksjon



Vi får da et øvre estimat på arealet under grafen til $f(x)$:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)+2$$

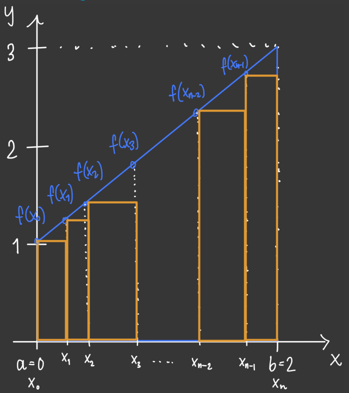
Introduksjon

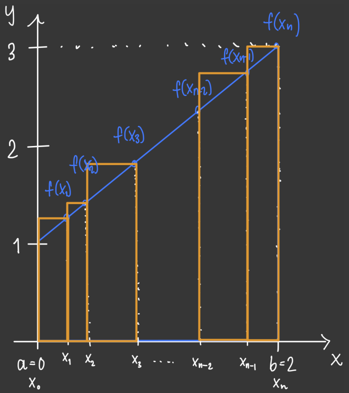


Tilsvarende tankegang gir oss et nedre estimat på arealet under grafen til $f(x)$:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2$$

Introduksjon





$$L(f,P) = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \qquad U(f,P) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2$$

Videre må

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

Introduksjon

Hvis vi nå lar

$$P' = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m\}$$

slik at $P \subset P'$, $n \leq m$, altså at P' er en forfining av P, vil vi få

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(P, f).$$

Kompletthetsegenskapen til $\mathbb{R}$ gir at det da må finnes minst ett tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(P, f) \qquad \text{for alle partisjoner } P.$$

I vårt tilfelle har vi

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 4 = \lim_{n\to\infty} \left(2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2\right).$$

Introduksjon

Merk:
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ skal gå mot 0 når n går mot ∞.

Dette ser vi enkelt dersom vi deler $[a, b]$ inn i n like store deler, da vil

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad \text{og} \qquad \Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Det bestemte integralet (kap. 5.3)

Definisjon (Integrerbar)

La $L(f, P)$ være en nedre Riemann-sum (altså en nedre approksimasjon av arealet under grafen)
og
$U(f, P)$ være en øvre Riemann-sum (altså en øvre approksimasjon av arealet under grafen).
Dersom det finnes akkurat ett tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P) \qquad \text{for alle partisjoner } P$$

så sier vi at $f(x)$ er integrerbar for $x \in [a, b]$, og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Det bestemte integralet (kap. 5.3)

Definisjon (Integrerbar)

Dersom det finnes akkurat ett tall I slik at

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P) \qquad \text{for alle partisjoner } P$$

så sier vi at $f(x)$ er integrerbar for $x \in [a,b]$, og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Merk:

- Vi har da tidligere vist at $f(x) = x+1$ er integrerbar for $x \in [0,2]$ og at

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 4.$$

Det bestemte integralet (kap. 5.3)

Definisjon (Integrerbar)

Dersom det finnes akkurat ett tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P) \qquad \text{for alle partisjoner } P$$

så sier vi at $f(x)$ er integrerbar for $x \in [a, b]$, og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Merk:

- Det bestemte integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er et tall.
- Det ubestemte integralet $\int f(x)\,dx$ er en funksjon.

Det bestemte integralet (kap. 5.3)

Definisjon (Integrerbar)

Dersom det finnes akkurat ett tall I slik at

$$L(f,P) \le I \le U(f,P) \qquad \text{for alle partisjoner } P$$

så sier vi at $f(x)$ er integrerbar for $x \in [a,b]$, og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Merk:

- Riemann-summen til f er

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i, \qquad s_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

  Dersom $f(x)$ er integrerbar for $x \in [a,b]$, så er

$$\lim_{n\to\infty} R(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{der } n \text{ er antall delintervaller av } P.$$

Det bestemte integralet (kap. 5.3)

Teorem 5.2 (Kontinuerlige funksjoner er integrerbare)

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in [a, b]$, så er $f(x)$ integrerbar for $x \in [a, b]$.

Merk:
For kontinuerlige funksjoner vil altså Riemann-summen konvergere mot det bestemte integralet.

Eksempel

Bestem grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^5 .$$

Egenskaper til det bestemte integralet (kap. 5.4)

La $f(x)$ og $g(x)$ være integrerbare på et intervall som inneholder a, b og c. Da er:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$
- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- Hvis $a \leq b$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
- Hvis $f(x)$ er en odde funksjon, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$
- Hvis $f(x)$ er en like funksjon, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Merk:
$f(-x) = -f(x)$ er odde, $f(-x) = f(x)$ er like (jevn).

Analysens fundamentalteorem (kap. 5.5)

Hvordan regner vi ut $\int_a^b x^5\,dx$ (uten å måtte regne ut grenseverdi)?

Hvordan deriverer vi et integral?

Teorem 5.5 (Analysens fundamentalteorem)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in I$ og $a \in I$.

(1) Da er

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{for alle } x \in I.$$

(2) Dersom F er en antiderivert til f, så er

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,.$$

Analysens fundamentalteorem (kap. 5.5)

Teorem 5.5 (Analysens fundamentalteorem)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in I$ og $a \in I$.

(1) Da er

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{for alle } x \in I.$$

(2) Dersom F er en antiderivert til f, så er

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}.$$

Merk:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Analysens fundamentalteorem (kap. 5.5)

Teorem 5.5 (Analysens fundamentalteorem)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in I$ og $a \in I$.

(1) Da er

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{for alle } x \in I.$$

(2) Dersom F er en antiderivert til f, så er

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,.$$

Teorem 5.5 (Analysens fundamentalteorem)

Evaluer integralet $\displaystyle\int_1^2 x^5\,dx$.