Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Nytt tema: Transcendente funksjoner og invers (kap. 3.1–3.6)

Forelesning uke 39

Nøkkelbegrep:

- Inverse funksjoner
- Eksponentialfunksjoner og logaritmer
- Inverse trigonometriske funksjoner
- Hyperbolske funksjoner

Introduksjon

Trancendente funksjoner er de funksjonene som ikke lar seg uttrykke av et endelig antall algebraiske operasjoner.

Eksempel

- $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f(x) = \ln(|x| + 1)$

Vi skal også se hvordan vi kan definere

$$f(x) = x^a \qquad \text{for } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

$$f(x) = a^x \qquad \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Inverse funksjoner (kap. 3.1)

Definisjon (Injektiv)

En funksjon f er injektiv dersom

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Eksempel

Funksjoner f hvor $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ er injektive.

Inverse funksjoner (kap. 3.1)

Definisjon (Invers)

Anta at $f : D_f \to V_f$ er injektiv. Den inverse funksjonen

$$f^{-1} : V_f \to D_f$$

til f er funksjonen definert ved å la $f^{-1}(x)$ være det entydig bestemte tallet $y \in D_f$ slik at $f(y) = x$. Dvs.

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(y) = x \qquad \text{for } y \in D_f.$$

Merk:

- $\dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$.
- $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$.

Inverse funksjoner (kap. 3.1)

Definisjon (Invers)

Anta at $f : D_f \to V_f$ er injektiv. Den inverse funksjonen

$$f^{-1} : V_f \to D_f$$

til f er funksjonen definert ved å la $f^{-1}(x)$ være det entydig bestemte tallet $y \in D_f$ slik at $f(x) = x$. Dvs.

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(y) = x \qquad \text{for } y \in D_f.$$

Eksempel

La $f : [-1, \infty) \to [2, \infty)$ være gitt ved

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+1}.$$

Finn $f^{-1}(x)$.

Inverse funksjoner (kap. 3.1)

Definisjon (Invers)

Anta at $f : D_f \to V_f$ er injektiv. Den inverse funksjonen

$$f^{-1} : V_f \to D_f$$

til f er funksjonen definert ved å la $f^{-1}(x)$ være det entydig bestemte tallet $y \in D_f$ slik at $f(x) = x$. Dvs.

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(y) = x \qquad \text{for } y \in D_f.$$

Eksempel

La $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ være gitt ved $f(x) = x^2$. Finn $f^{-1}(x)$.

Inverse funksjoner (kap. 3.1)

Den deriverte til inversfunksjonen

Anta at $f(x)$ er deriverbar for $x \in (a, b)$ og at enten så er $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$ eller så er $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$. Da er

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Eksponentialfunksjoner (kap. 3.2–3.4)

En eksponentialfunksjon er en funksjon på formen

$$f(x) = a^x, \qquad \text{der } a > 0 \text{ og } a \neq 1.$$

Per definisjon er

- $a^0 = 1$
- $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n ganger), $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Merk:
a^x for $x \in \mathbb{N}$ er ok, a^x for $x \in \mathbb{Q}$ er ok, men hva med a^x for $x \in \mathbb{R}$?

Eksponentialfunksjoner (kap. 3.2–3.4)

Vi definerer $\exp(x)$ som den entydig bestemte eksponentialfunksjonen som tilfredsstiller

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x), & \text{for alle } x \in \mathbb{R}, \\ \exp(0) = 1. \end{cases}$$

Vi definerer så $e = \exp(1)$, dette er Eulers tall ($\approx 2.71828\ldots$), slik at

$$e^x = \exp(x) \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}!$$

Dvs. vi kan gi akkurat denne meningen til grunntallet e opphøyd i det reelle tallet x.

Vi definerer så den naturlige logaritmefunksjonen $\ln(x) = \exp^{-1}(x)$.

Eksponentialfunksjoner (kap. 3.2–3.4)

Teorem 3.2 og 3.3 (Egenskaper til ln og exp)

$D_{\exp} \in \mathbb{R},\ V_{\exp} \in (0,\infty)$	$D_{\ln} \in (0,\infty),\ V_{\ln} \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$	$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$	$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$
$\exp(0) = 1$	$\ln(1) = 0$
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$	$\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$
$\exp(x-y) = \exp(x)\,(\exp(y))^{-1}$	$\ln(xy^{-1}) = \ln(x) - \ln(y)$
$(\exp(x))^r = \exp(rx)$	$\ln(x^r) = r\ln(x)$

Eksempel

Finn den deriverte til x^{π}, $x > 0$.

Eksponentialfunksjoner (kap. 3.2–3.4)

Teorem 3.5 (Vekstegenskaper til ln og exp)

La $a > 0$. Da har vi at:

- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = 0$

Teorem 3.6

For ethvert reelt tall x, har vi at

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Inverse trigonometriske funksjoner (kap. 3.5)

$f(x) = \sin(x)$ er ikke injektiv når $D_f = \mathbb{R}$.

Men la $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, da har vi at

$$y = \sin^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sin(y).$$

Vi kan gjøre lignende betraktninger for andre trigonometriske funksjoner.

Merk:

$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x) \neq (\sin(x))^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Eksempel

Forenkl uttrykket $\cos(\arctan(x))$ for $x \in (-\infty, \infty)$.

Hyperbolske funksjoner (kap. 3.6)

For $x \in \mathbb{R}$, kan vi definere

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right),$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

De har alle egenskaper som ligner på $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, til og med inversfunksjoner.

Eksempel

Vis at $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$.