Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Vi fortsetter med: Derivasjon II (kap. 2.9, 4.1 og 4.3–4.5)

Forelesning uke 38

Nøkkelbegrep:

- Implisitt derivasjon
- Koblede hastigheter
- Ubestemte uttrykk og l'Hôpitals regel
- Globale og lokale ekstremalverdier

Introduksjon

Vi fortsetter med å forstå hva den deriverte forteller oss.

Implisitt derivasjon (kap. 2.9)

Vi skal nå se på ligninger på formen

$$F(x, y) = 0.$$

Av og til kan vi fra et slikt uttrykk finne $y = y(x)$.

Eksempel

La $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2^2 = 0$.

Vi sier at ligningen $F(x, y) = 0$ definerer y implisitt som én eller flere funksjoner av x.

Selv om vi ikke kjenner uttrykket for $y = y(x)$, kan vi alltid finne den deriverte $\frac{dy}{dx}$ ved å benytte implisitt derivasjon.

Eksempel

Finn en ligning for tangenten til kurven gitt ved

$$x^2 + y^2 - 2^2 = 0$$

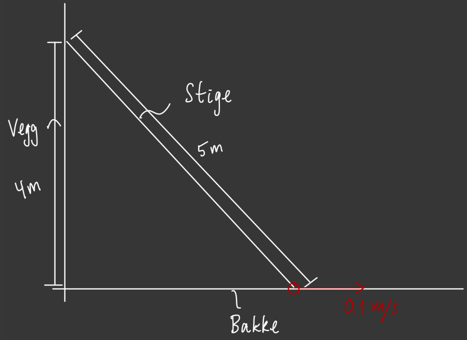
i punktet $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Koblede hastigheter (kap. 4.1)

Koblede hastigheter er rett og slett når det finnes en matematisk relasjon mellom 2 hastigheter, altså 2 deriverte.

Eksempel

Hvor fort beveger toppen av stigen seg på det gitte tidspunktet når bunnen av stigen beveger seg med 0.1 m/s?



Ubestemte uttrykk (kap. 4.3)

I OF 2 og IF 3 så vi at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

I $x = 0$, er $\dfrac{\sin(x)}{x}$ et eksempel på et ubestemt uttrykk av typen $\dfrac{0}{0}$.

Grunnen til at vi kaller dette et ubestemt uttrykk kan illustreres av

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0.$$

Eksempler på ubestemte uttrykk (kap. 4.3)

Type	Eksempler
$\dfrac{0}{0}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3x^2+2}$
$0\cdot\infty$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$\infty-\infty$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$
0^0	$\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$
1^∞	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
∞^0	$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\tan(x))^{\cos(x)}$

Ubestemte uttrykk (kap. 4.3)

Teorem 4.3 og 4.4 (l'Hôpitals regel)

Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare for $x \in (a, b)$, og at $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$. La $c \in (a, b)$.

(1) Dersom $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ og $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, så er

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(2) Dersom $\left(\lim_{x \to c} |f(x)| = \right) \lim_{x \to c} |g(x)| = \infty$ og $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, så er

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Merk: L kan være et reelt tall, lik ∞ eller lik $-\infty$.
Tilsvarende holder for $\lim_{x \to a+}$, $\lim_{x \to b-}$, $\lim_{x \to \infty}$ eller $\lim_{x \to -\infty}$.

Ubestemte uttrykk (kap. 4.3)

Teorem 4.3 og 4.4 (l'Hôpitals regel)

Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare for $x \in (a, b)$, og at $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$. La $c \in (a, b)$.

Dersom $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ og $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, så er

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Eksempel

Bestem følgende grenseverdi:

$$\lim_{x \to \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right).$$

Ekstremalverdier (kap. 4.4 og 4.5)

Definisjon (Globale maksimums- og minimumspunkter)

Et punkt x_0 kalles et:

- globalt maksimumspunkt for en funksjon $f(x)$ dersom

$$x_0 \in D_f \qquad \text{og} \qquad f(x_0) \geq f(x) \text{ for alle } x \in D_f.$$

- globalt minimumspunkt for en funksjon $f(x)$ dersom

$$x_0 \in D_f \qquad \text{og} \qquad f(x_0) \leq f(x) \text{ for alle } x \in D_f.$$

Ekstremalverdier (kap. 4.4 og 4.5)

Definisjon (Lokale maksimums- og minimumspunkter)

Et punkt x_0 kalles et:

- lokalt maksimumspunkt for en funksjon $f(x)$ dersom

$$x_0 \in D_f \text{ og det finnes et tall } \delta > 0 \text{ slik at}$$
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ for alle } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

- lokalt minimumspunkt for en funksjon $f(x)$ dersom

$$x_0 \in D_f \text{ og det finnes et tall } \delta > 0 \text{ slik at}$$
$$f(x_0) \leq f(x) \text{ for alle } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ekstremalverdier (kap. 4.4 og 4.5)

Merk:

- Ekstremalverdisetningen (Teorem 1.8) sikrer at en kontinuerlig $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ har globale maksimums- og minimumsverdier (= globale ekstremalverdier).
- En funksjon $f(x)$ har lokale ekstremalverdier i punkter $x = c$, der c er en av følgende typer:
  (i) kritiske punkter, $f'(c) = 0$.
  (ii) singulære punkter, $f(x)$ er ikke deriverbar i $x = c$.
  (iii) endepunkter.

Eksempel (Lokale maksimums- og minimumspunkter)

Finn maksimums- og minimumspunktene til

$$f(x) = x^3(x-1)^{\frac{2}{3}}, \qquad \text{der } x \in [-1, 2].$$

Annenderiverttesten (kap. 4.4 og 4.5)

Merk:
Vi kan også bruke annenderiverttesten for å klassifisere de lokale ekstremalverdiene til $f(x)$.
Anta at $x = x_0$ er et kritisk punkt til en funksjon $f(x)$, altså at $f'(x_0) = 0$. Da har vi:

(i) $f''(x_0) < 0$, så er x_0 et lokalt maksimumspunkt.

(ii) $f''(x_0) > 0$, så er x_0 et lokalt minimumspunkt.

(iii) $f''(x_0) = 0$, så kan vi ikke konkludere.