Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Nytt tema: Derivasjon I (kap. 2.1–2.8)

Forelesning uke 37

Nøkkelbegrep:

- Definisjon av den deriverte
- Regneregler for derivasjon
- Derivasjon av trigonometriske funksjoner
- Lineær tilnærming
- Sekantsetningen

Introduksjon

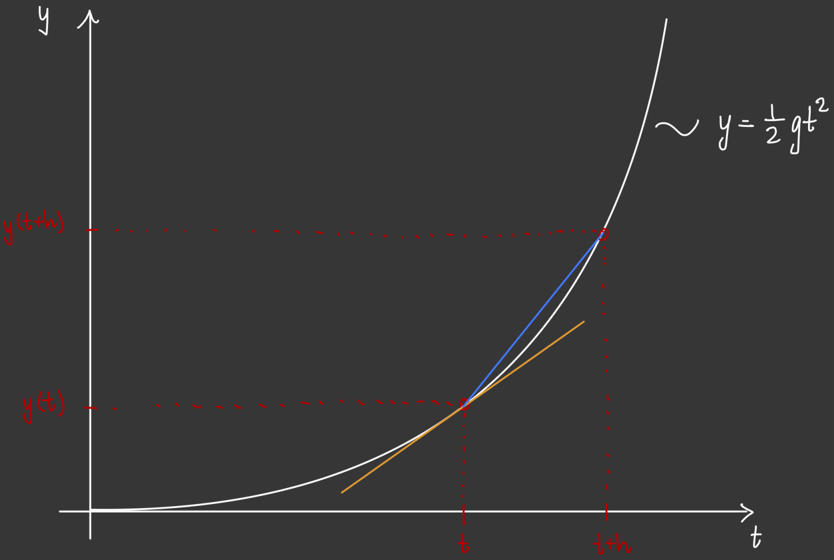
Eksempel

En stein som slippes fra en klippe vil falle en distanse y som funksjon av tiden t gitt ved

$$y = y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \qquad t \geq 0.$$

Hva er gjennomsnittsfarten til steinen over tidsrommet $[t, t+h]$?
Hva er den momentane farten til steinen ved tiden t?

Introduksjon



Den deriverte (kap. 2.2)

Deriverbar

Anta at $f(x)$ er definert for $x \in (a, b)$. Vi sier at $f(x)$ er deriverbar i punktet $x_0 \in (a, b)$ dersom grenseverdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer.

Den deriverte (kap. 2.2)

Deriverbar

Anta at $f(x)$ er definert for $x \in (a, b)$. Vi sier at $f(x)$ er deriverbar i punktet $x_0 \in (a, b)$ dersom grenseverdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer.

Vi kaller $f'(x_0)$ for den deriverte til $f(x)$ i punktet $x = x_0$.

Den deriverte (kap. 2.2)

Deriverbar

Anta at $f(x)$ er definert for $x \in (a, b)$. Vi sier at $f(x)$ er deriverbar i punktet $x_0 \in (a, b)$ dersom grenseverdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer.

Vi kaller $f'(x_0)$ for den deriverte til $f(x)$ i punktet $x = x_0$.

Eksempel

Bestem den deriverte til $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet $x = 4$.

Den deriverte (kap. 2.2)

Deriverbar

Anta at $f(x)$ er definert for $x \in (a, b)$. Vi sier at $f(x)$ er deriverbar i punktet $x_0 \in (a, b)$ dersom grenseverdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer.

Vi kaller $f'(x_0)$ for den deriverte til $f(x)$ i punktet $x = x_0$.

Merk:

En funksjon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er deriverbar i

- $x_0 \in (a, b) \iff f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- $x_0 = a \iff f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- $x_0 = b \iff f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\left(f+g\right)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $\left(f-g\right)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $\big(f-g\big)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $\big(Cf\big)'(x_0) = Cf'(x_0)$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $\big(f-g\big)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $\big(Cf\big)'(x_0) = Cf'(x_0)$
- $\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $\big(f-g\big)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $\big(Cf\big)'(x_0) = Cf'(x_0)$
- $\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Regneregler for derivasjon (kap. 2.3–2.4)

La $f(x)$ $g(x)$ være deriverbare, og C være en konstant.
Da gjelder følgende:

- $\left(f+g\right)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $\left(f-g\right)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $\left(Cf\right)'(x_0) = Cf'(x_0)$
- $\left(f \cdot g\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- $\left(f \circ g\right)'(x_0) = \frac{d}{dx} f(g(x))\Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Eksempel

La $h(x) = \sqrt{1+x^2}$. Finn $h'(x)$.

Egenskaper til den deriverte (kap. 2.3)

Deriverbar medfører kontinuitet

Hvis $f(x)$ er deriverbar i $x = x_0$,

Egenskaper til den deriverte (kap. 2.3)

Deriverbar medfører kontinuitet

Hvis $f(x)$ er deriverbar i $x = x_0$, så er $f(x)$ kontinuerlig i $x = x_0$.

Egenskaper til den deriverte (kap. 2.3)

Deriverbar medfører kontinuitet

Hvis $f(x)$ er deriverbar i $x = x_0$, så er $f(x)$ kontinuerlig i $x = x_0$.

Merk:

Funksjonen $f(x) = |x|$ er kontinuerlig i $x = 0$, men den er ikke deriverbar i $x = 0$.

Egenskaper til den deriverte (kap. 2.3)

Deriverbar medfører kontinuitet

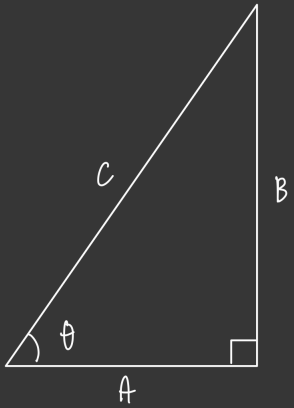
Hvis $f(x)$ er deriverbar i $x = x_0$, så er $f(x)$ kontinuerlig i $x = x_0$.

Merk:

Funksjonen $f(x) = |x|$ er kontinuerlig i $x = 0$, men den er ikke deriverbar i $x = 0$.

Hva er den deriverte for $x \neq 0$?

Derivasjon av trigonometriske funksjoner (kap. 2.5)



$$\sin(\theta) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{B}{C}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{A}{C}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{B}{A}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{C}{B}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{C}{A}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{A}{B}$$

Derivasjon av trigonometriske funksjoner (kap. 2.5)

Teorem 2.7 (sinus og cosinus er kontinuerlige)

Funksjonene $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$.

Derivasjon av trigonometriske funksjoner (kap. 2.5)

Teorem 2.7 (sinus og cosinus er kontinuerlige)

Funksjonene $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$.
Spesielt så er

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1.$$

Derivasjon av trigonometriske funksjoner (kap. 2.5)

Teorem 2.7 (sinus og cosinus er kontinuerlige)

Funksjonene $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt så er

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1.$$

Men er f. eks. $\sin(x)$ deriverbar? Og hva er så den deriverte?

Lineær tilnærming (kap. 2.5)

Ide: Tangentlinjen approximerer funksjonen.

Lineær tilnærming (kap. 2.5)

Ide: Tangentlinjen approximerer funksjonen.

La $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Lineær tilnærming (kap. 2.5)

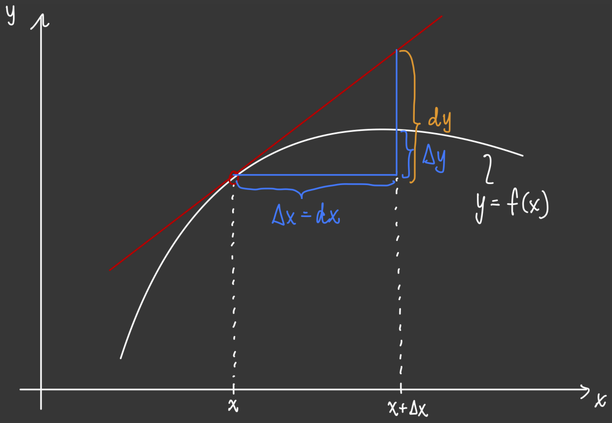
Ide: Tangentlinjen approximerer funksjonen.

La $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Hvordan kan vi uttrykke Δy vha. den deriverte?

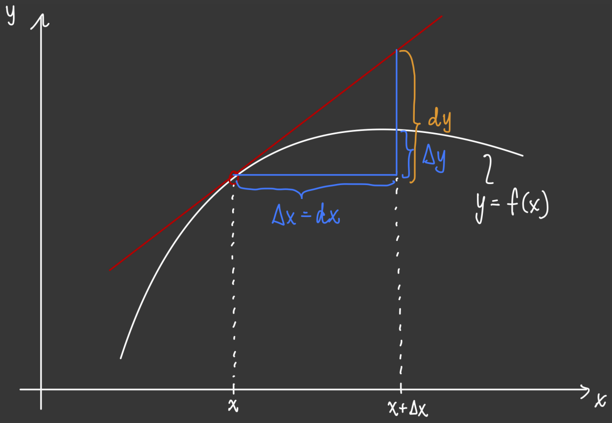
Lineær tilnærming (kap. 2.5)

Ide: Tangentlinjen approximerer funksjonen.
La $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Hvordan kan vi uttrykke Δy vha. den deriverte?



Lineær tilnærming (kap. 2.5)

Ide: Tangentlinjen approximerer funksjonen.
La $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
Hvordan kan vi uttrykke Δy vha. den deriverte?



$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx = dy$$

Sekantsetningen (kap. 2.8)

Teorem 2.11 (Sekantsetningen / "Mean-value theorem")

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in [a, b]$ og deriverbar for $x \in (a, b)$. Da finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sekantsetningen (kap. 2.8)

Teorem 2.11 (Sekantsetningen / "Mean-value theorem")

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \in [a, b]$ og deriverbar for $x \in (a, b)$. Da finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Momentan hastighet i et eller annet punkt c

$=$ Gjennomsnittshastighet

Sekantsetningen (kap. 2.8)

Momentan hastighet i et eller annet punkt c
= Gjennomsnittshastighet