Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Vi fortsetter med: Følger, grenser og kontinuitet II (kap. 1.1–1.5)

Forelesning uke 36

Nøkkelbegrep:

- Kontinuerlige funksjoner
- Ekstremalverdisetningen for lukkede intervaller
- Skjæringssetningen
- Grenseverdier

Introduksjon

Vi skal se at kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller danner grunnlaget for mye av vår teori.

For $A \subseteq \mathbb{R}$, skriver vi $f : A \to \mathbb{R}$, og vi snakker ofte om:

- Definisjonsmengde, D_f. Altså, $D_f = A$.
- Verdimengde, V_f. $V_f = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D_f\}$.

Eksempel

La $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, der $f(x) = 2x - 1$. $D_f = [0,1]$. $V_f = [-1,1]$.

Kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Vi trenger et matematisk språk for:

$f(x)$ er kontinuerlig i punktet x_0

dersom

x nærme x_0 gir at $f(x)$ nærme $f(x_0)$

La oss skissere situasjonen.

Konklusjon: Uansett hvor nærme $f(x_0)$ vi ønsker at $f(x)$ skal være, kan vi finne et intervall om x_0 slik at dette faktisk skjer.

Kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Definisjon (Kontinuitet)

En funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i punktet $x_0 \in D_f$
dersom det
for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Merk:
Vi sier at $f(x)$ er kontinuerlig dersom $f(x)$ er kontinuerlig i alle punkter $x \in D_f$.

Kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Definisjon (Kontinuitet)

En funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i punktet $x_0 \in D_f$
dersom det
for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Eksempel

Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at $f(x) = 3x$ er kontinuerlig i $x = 0$.

Regneregler for kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

La $f(x)$ og $g(x)$ være kontinuerlige funksjoner.
Da er følgende funksjoner kontinuerlige:

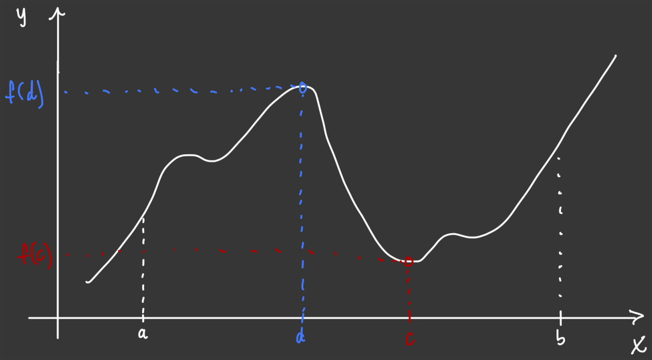
- $f(x) + g(x)$
- $f(x) - g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Egenskaper til kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Teorem 1.8 (Ekstremalverdisetningen)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$.
Da finnes det to tall $c, d \in [a, b]$ slik at

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \qquad \text{for alle } x \in [a, b].$$

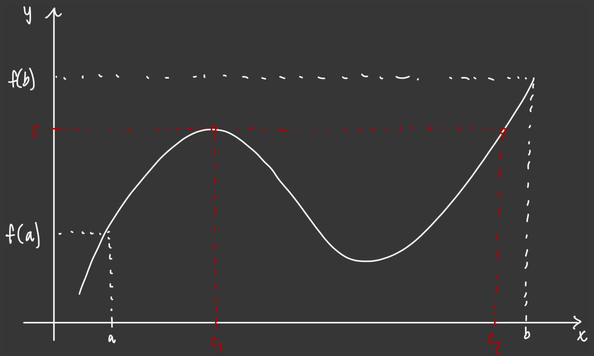


Egenskaper til kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Teorem 1.9 (Skjæringssetningen = Mellomverdisetningen)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$.
Dersom $f(a) \neq f(b)$, og s er mellom $f(a)$ og $f(b)$,
så finnes det et tall $c \in (a, b)$ slik at

$$f(c) = s.$$



Egenskaper til kontinuerlige funksjoner (kap. 1.4)

Teorem 1.9 (Skjæringssetningen = Mellomverdisetningen)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$.
Dersom $f(a) \neq f(b)$, og s er mellom $f(a)$ og $f(b)$,
så finnes det et tall $c \in (a, b)$ slik at

$$f(c) = s.$$

Eksempel

La $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x - 1$. Vis at det finnes en $c \in (-1, 1)$ slik at $f(c) = 0$.

Grenseverdi (kap. 1.2, 1.5)

Eksempel

Bestem c slik at

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig.

Både $\sin(x)$ og $\frac{1}{x}$ er kontinuerlige for $x \neq 0$,
og dermed er $\frac{\sin(x)}{x}$ kontinuerlig for $x \neq 0$.

Samtidig er $\frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$ som er udefinert.

Grenseverdi (kap. 1.2, 1.5)

Eksempel

Bestem c slik at

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig.

Vi har også

	$x = 1$	$x = 0.100$	$x = 0.010$	$x = 0.001$
$\frac{\sin(x)}{x}$	0.841	0.998	0.999	0.999

Det kan derfor se ut til at

$$x \text{ nærmer seg } 0 \qquad \text{gir at} \qquad \frac{\sin(x)}{x} \text{ nærmer seg } 1.$$

I IF 3 skal vi se nærmere på dette.

Grenseverdi (kap. 1.2, 1.5)

Definisjon (Grenseverdi)

Funksjonen $f(x)$ nærmer seg L som grenseverdi når x går mot a dersom følgende gjelder:
For ethvert tall $\varepsilon > 0$, finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vi skriver "$\lim_{x \to a} f(x) = L$" eller "$f(x) \to L$ når $x \to a$".

Teorem 1.1 (Ensidige grenser)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = L = \lim_{x \to a+} f(x)$$

Grenseverdi (kap. 1.2, 1.5)

Definisjon (Grenseverdi)

Funksjonen $f(x)$ nærmer seg L som grenseverdi når x går mot a dersom følgende gjelder:
For ethvert tall $\varepsilon > 0$, finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vi skriver "$\lim_{x \to a} f(x) = L$" eller "$f(x) \to L$ når $x \to a$".

Merk: En funksjon $f(x)$ definert for $x \in [a, b]$ er kontinuerlig i

- $x_0 \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $x_0 = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- $x_0 = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Regneregler for grenseverdier (kap. 1.2, 1.5)

Anta at

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Da gjelder:

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Grenseverdi (kap. 1.2, 1.5)

Eksempel

Finn

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x}.$$