Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med
Gereon Quick

Vi diskuterer: Differensialligninger (kap. 7.9, 19.1–19.3)

forelesning uke 47

Nøkkelbegreper uke 47: Differensialligninger

- Førsteordens differensialligninger
- Separable differensialligninger
- Integrerende faktor
- Eksistens og entydighet
- Eulers metode

- Førsteordens differensialligninger:
  - Husk dette eksemplet fra den første undervisningsuka...

Eksempel 1

Denne modellen er et forsøk på å beskrive utviklingen av en smittsom, uhelbredelig, men ikke-dødelig sykdom i en befolkning på 2000 personer som alle befinner seg innenfor et begrenset område. Som et eksempel kan vi tenke oss at befolkningen er studenter ved NTNU og at alle studentene oppholder seg på eller i umiddelbar nærhet av campus. Sykdommen bryter ut ved tid $t = 0$, der tiden er målt i dager. Vi antar at befolkningen er godt blandet. Det vil si at alle i befolkningen er i kontakt med samme brøkdel av befolkningen fra begge kategorier (altså infiserte og ikke-infiserte).

Smitte overføres ved nær kontakt mellom en infisert og en ikke-infisert person. Dette kan uttrykkes matematisk ved at antall nye personer som blir infisert per dag (endringsraten for antall infiserte) er proporsjonal med produktet av antall infiserte personer og antall personer som ikke er infiserte. (Hvorfor dette er rimelig skal vi diskutere og begrunne senere.)

La $I(t)$ betegne antall infiserte personer ved tidspunkt t. Endringsraten for antall infiserte kan da beskrives ved

$$\frac{dI}{dt} = kI(2000 - I),$$

der k er en positiv konstant.

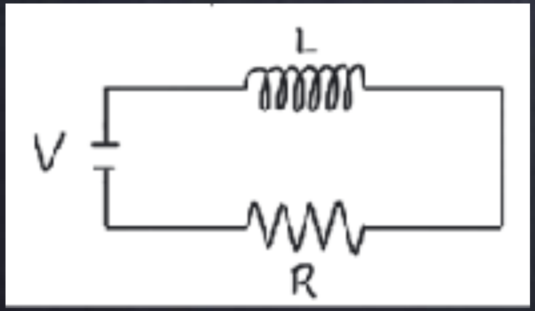
- Førsteordens differensialligninger:

Definisjon: En differensialligning er en ligning på formen

$$y'(x) = f(x, y).$$

En løsning på et intervall I er en funksjon $y(x)$ som er deriverbar på hele I og tilfredsstiller $y'(x) = f(x, y(x))$ for alle x i I.

- Eksempler:
  - $y' = ky$ med k konstant — exponentiell vekst
  - $y' = k(y - T)$ med k konstant — Newtons avkjølingslov
  - $y' = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$ med $k, L > 0$ konstanter — logistisk vekst
  - $L\frac{dI}{dt} + RI = V$ med $L, R > 0$ konstanter — RL-krets



- Førsteordens differensialligninger:

Definisjon: Et **initialverdiproblem** består av en differensialligning

$y'(x) = f(x, y)$ og en **initialbetingelse** $y(x_0) = y_0$.

En **løsning** på et intervall I med $x_0 \in I$ er en løsning $y(x)$ av ligningen $y'(x) = f(x, y)$ på I slik at $y(x_0) = y_0$.

- Eksempler:
  - $y' + x^2 y = x^2$ og $y(0) = 2$.
  - $y = (x+1)(y' - x)$ og $y(0) = 4$.
  - $y' = \dfrac{2y}{x(x^2+1)}$ og $y(1) = 1$.

Seprable differensialligninger:

En førsteordens differensialligning kalles separabel dersom den kan skrives på formen

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

der $h(x)$ bare avhenger av x og $g(y)$ bare av y.

- $\dfrac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$ Anta at $g(y) \neq 0$:

separasjon av variabler

$$\boxed{\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx}$$

vi integrer på begge sider

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx$$

vi får en ligning på formen

$$G(y) = H(x) + C$$

der $G'(y) = 1/g(y)$ og $H'(x) = h(x)$

nå løser vi ligningen for y og bruker initialverdien for å bestemme konstanten C

- Lineare differensialligninger:

En førsteordens differensialligning kalles linear dersom den kan skrives på formen

vi antar at begge er kontinuerlige

$$y' + p(x)y = q(x)$$

der $p(x)$ og $q(x)$ er kjente funksjoner.

- la $\mu(x)$ være en antiderivert av $p(x)$
- vi ganger begge sider med $e^{\mu(x)}$

produktregel for derivasjon

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right) = e^{\mu(x)}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = e^{\mu(x)}q(x)$$

vi integrer på begge sider

$$e^{\mu(x)}y = \int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

dermed får vi løsningen

$$\boxed{y(x) = e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}q(x)dx}$$

Merk: $e^{\mu(x)}$ kalles en integrerende faktor

- Picarditerasjoner:

Anta at $y(x)$ er en løsning for initialverdiproblemet

$$y' = f(x, y) \text{ og } y(x_0) = y_0.$$

Da tilfredsstiller $y(x)$ også $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$

vi starter med $y_0(x) = y_0$ og setter: $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$

$$\vdots$$

Denne iterajonsprosessen kalles picarditerasjoner

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$$

$$\vdots$$

og får en følge av funksjoner $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

- Eksistens og entydighet:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$$

Anta at $f(x, y)$ tilfredsstiller:

- Det finnes en konstant M slik at for alle x i $[a, b]$ og alle y i $[c, d]$ vil $|f(x, y)| \leq M$.

- Det finnes en konstant L slik at for alle x i $[a, b]$ og alle $y, \tilde{y}$ i $[c, d]$ vil $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$.

- Da vil picarditerasjonenen konvergere til en funksjon $y = y(x)$ som er en løsning for $y'(x) = f(x, y)$ og $y(x_0) = y_0$ på intervallet $(-\delta + x_0, x_0 + \delta)$ for et lite $\delta > 0$.

- Videre er $y = y(x)$ den eneste løsningen av initialverdiproblemet.

- Ikke alle løsninger er entydige:

Vi ser på initialverdiproblemet $y'(x) = 3y^{2/3}$ og $y(0) = 0$:

- Det finnes minst to løsninger for problemet:

$$y(x) = x^3 \text{ og } y(x) = 0.$$

- Det skjer fordi $\frac{d}{dx}\left(3y^{2/3}\right) = \frac{2}{y^{1/3}}$ er ubegrenset nærme 0.

Dermed finnes det ikke en konstant L slik at $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ rundt 0.

Med andre ord vi mister kontroll over funksjonen $y(x)$ rundt 0.

- Eulers metode: https://s.ntnu.no/tma4100

Gitt et initialverdiproblem $y' = f(x, y)$ og $y(x_0) = y_0$:

- Lineær approksimasjon i (x_0, y_0):

$$y(x) \approx y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$
$$= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$
for x i $[x_0, x_0 + h]$

vi velger en skrittlengde h
og gjentar prosessen...

- Lineær approksimasjon i (x_1, y_1)
med $x_1 = x_0 + h$ og $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$:

$$y(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1)$$
for x i $[x_1, x_1 + h]$

$\vdots$ vi gjentar prosessen...

$$\vdots$$

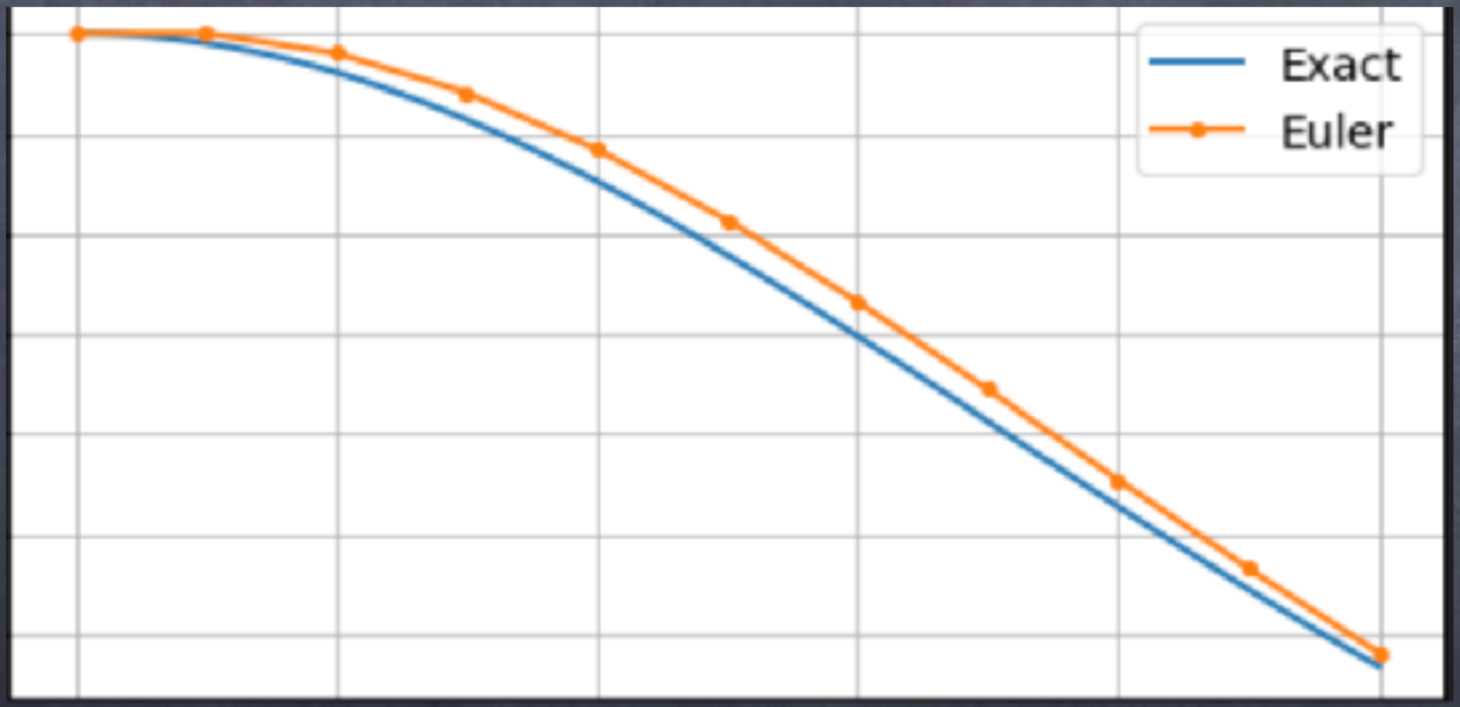
- Lineær approksimasjon i (x_n, y_n)
med $x_n = x_0 + n \cdot h$ og
$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$:

$$y(x) \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x - x_n)$$
for x i $[x_n, x_n + h]$

- Eulers metode: https://s.ntnu.no/tma4100

  - gå til nettsiden for å bruke koden i python selv...

Eksempel: Initialverdiproblem $y' = -2xy$ og $y(0) = 1$



- Eksakt løsning: $y(x) = e^{-x^2}$