Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Gereon Quick

Vi diskuterer: Potens- og taylorrekker (kap. 9.5 - 9.7)

forelesningsuke 46

Nøkkelbegreper uke 46: Potens- og taylorrekker

- Potensrekker
- Konvergensradius
- Taylorrekker

Potensrekker: Definition 9.7 i læreboka

Definisjon: En **potensrekke** er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots$$

der $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ er tall.

- Eksempel:
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots$
  - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x-5)^n = \frac{x-5}{2} + \frac{(x-5)^2}{8} + \cdots$
  - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$

Potensrekker:

Theorem 9.17 i læreboka

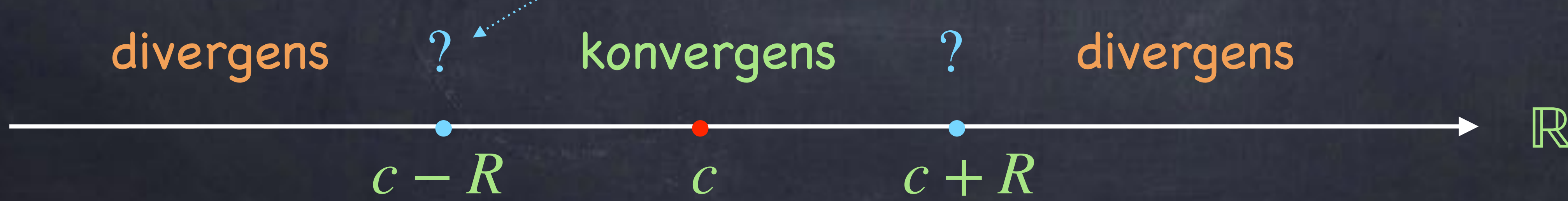
La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ være en potensrekke. Da er det tre muligheter:

- Potensrekken konvergerer bare for $x = c$.
- Potensrekken konvergerer for alle reelle tall x.

tallet R kalles konvergensradius av potensrekken

- Det finnes et tall $R > 0$ slik at potensrekken konvergerer absolutt for alle x slik at $|x - c| < R$, og divergerer for alle x slik at $|x - c| > R$.

vi kan ha enten konvergens eller divergens



Konvergensradius:

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ være en potensrekke.

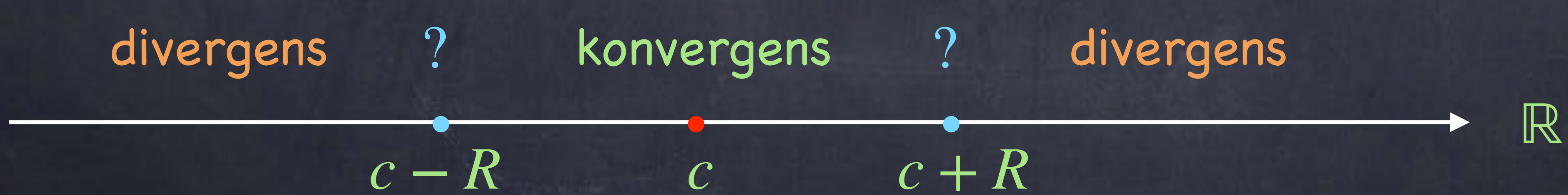
tallet R kalles konvergensradius til potensrekken

- Det finnes et tall $R > 0$ slik at potensrekken konvergerer absolutt for alle x slik at $|x-c| < R$, og divergerer for alle x slik at $|x-c| > R$.

Anta at $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ enten eksisterer eller er $+\infty$.

Da er $R = \frac{1}{L}$ konvergensradien til rekken.

- Dersom $L = 0$, så har vi $R = \infty$.
- Dersom $L = \infty$, så har vi $R = 0$.



Algebra for potensrekker:

= Theorem 9.18 i læreboka

vi ser på $c = 0$ for å gjøre skrivejobben enklere for oss

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ være potensrekker med konvergensradius R_a og R_b.

Da gjelder:

- For K en konstant har potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} K \cdot a_n x^n$ konvergensradius R_a og $\sum_{n=0}^{\infty} K \cdot a_n x^n = K \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ har konvergensradius $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
- Potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$ har konvergensradius $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ og vi har $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kalles Cauchy-produkt.

Derivasjoner og integraler for potensrekker:

= Theorem 9.19 i læreboka

vi ser på $c = 0$ for å gjøre skrivejobben enklere for oss

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer mot summen $f(x)$ for x i intervallet $(-R, R)$ med $R > 0$, dvs $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for $-R < x < R$.

Da gjelder:

faktisk uendelig mange ganger

- $f(x)$ er deriverbar på $(-R, R)$ og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \text{ for } -R < x < R.$$

Vi får derivere og integrere leddvis!

- $f(x)$ er integrerbar på alle lukkede delintervaller av $(-R, R)$

og dersom $|x| < R$, så er $\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$.

- Abels teorem: = Theorem 9.20 i læreboka

  - Summen til $f(x)$ til en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ avhenger kontinuerlig av x i hele konvergensintervallet.

  med $R > 0$

  - Dersom potensrekken konvergerer i $x = c + R > 0$, så er

$$\lim_{x \to (c+R)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(c+R).$$

  med $R > 0$

  - Dersom potensrekken konvergerer i $x = c - R > 0$, så er

$$\lim_{x \to (c-R)+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = f(c-R).$$

- **Taylorrekker:** = Theorem 9.21 + Definiton 9.8 i læreboka

  - Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konvergerer mot summen $f(x)$ for x i intervallet $(c-R, c+R)$ med $R > 0$.

Da gjelder: $$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

  - Anta at funksjonen $f(x)$ er uendelig mange ganger deriverbar i $x = c$. Så kalles potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ taylorrekken til $f(x)$ om $x = c$.

    - For $c = 0$ kalles potensrekken også maclaurinrekken til $f(x)$.

Eksempler på taylorrekker:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ for alle reelle tall x
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$ for alle reelle tall x
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$ for alle reelle tall x
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ for alle $-1 < x < 1$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$ for alle $-1 < x \le 1$
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$ for alle $-1 \le x \le 1$

- Analytise funksjoner: Definiton 9.9 i læreboka

  - En funksjonen $f(x)$ kalles analytisk i $x = c$ dersom $f(x)$ har en taylorrekke om $x = c$ som konvergerer mot $f(x)$ i et åpent (!) intervall rundt $x = c$.

  - Dersom $f(x)$ er analytisk i alle x i et intervall I, så kalles $f(x)$ analytsik på I.

  - Ikke alle funksjoner som har en taylorrekke, er analytiske!