Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med
Gereon Quick

Vi diskuterer: Konvergens av rekker (kap. 9.3 + 9.4)

forelesningsuke 45

Nøkkelbegreper uke 45: Konvergens av rekker

- Sammenligningstest
- Grensesammenligningstest
- Forholdstest
- Rottest
- Absolutt og betinget konvergens
- Alternerende rekke-test

- Motivasjon: På veil til taylorrekker...

Husk taylorpolynomet $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ til $f(x)$ om a:

vi vil la $n \to \infty$

- Eksempel: $f(x) = \ln(1+x)$ og $a = 0$: $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

- Spørsmål: For hvilke x får vi $f(x)$ tilbake når $n \to \infty$?

det vil si

- Eksempel: For hvilke x er $\ln(1+x) = P_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$?

Vi kunne bruke rekker for å lage nye funksjoner!

For et godt svar må vi undersøke når rekker konvergerer ...

- **Sammenligningstest:** = Theorem 9.9 i læreboka Kap. 9.3

Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er to rekker slik at

$0 \leq a_n \leq K \cdot b_n$ for et tall $K > 0$ og for alle n stor nok.

Da har vi:

- Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer mot ∞, så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mot ∞.

- **Grensesammenligningstest:** = Theorem 9.10 i læreboka

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

leddene er ≥ 0

Da har vi:

- Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$,

  så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer mot ∞ og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$,

  så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mot ∞.

- **Forholdstest:** = Theorem 9.11 i læreboka

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

leddene er ≥ 0

Vi antar at $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ enten eksisterer eller er $+\infty$.

Da har vi:

- Dersom $0 \leq \rho < 1$, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Dersom $1 < \rho \leq \infty$, så har vi $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer mot ∞.
- Dersom $\rho = 1$, så gir testen ingen konklusjon.

- **Rottest:** = Theorem 9.12 i læreboka

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

leddene er ≥ 0

Vi antar at $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ enten eksisterer eller er $+\infty$.

Da har vi:

- Dersom $0 \leq \sigma < 1$, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Dersom $\sigma > 1$, så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mot ∞.
- Dersom $\sigma = 1$, så gir testen ingen konklusjon.

Absolutt og betinget konvergens:

Definisjon: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer **absolutt** dersom

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

vi tar absoluttverdier

- Teorem: En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

= Theorem 9.13 i læreboka

"Absolutt konvergens er sterkere enn vanlig konvergens."

Definisjon: En konvergent rekke som **ikke** er absolutt konvergent, kalles **betinget** konvergent.

- Eksempel: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$ er bare **betinget** konvergent.

- Bytte rekkefølgen av leddene: = Theorem 9.16 i læreboka

  - Anta at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt og har sum S.

    Da er også rekken med ethvert ombytte av rekkefølgen av leddene a_n absolutt konvergent og har sum S.

  - Anta at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer betinget.

    For ethvert reelt tall L finnes det et ombytte av rekkefølgen av leddene a_n slik at den nye rekken konvergent mot L.

- Alternerende rekke-test: = Theorem 9.14+9.15 i læreboka

Anta at det finnes et tall N slik at følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tilfredsstiller

en alternerende rekke

- $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ for alle $n > N$,
- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for alle $n > N$,
- og $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Da gjelder:

- Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer,
- vi har estimatet $|s - s_k| \leq |a_{k+1}|$.

summen til rekka $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

k-te delsum $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + \cdots + a_k$