Velkommen
til
oversiktsforelesninger
i
Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Nytt tema:
Følger, grenser og kontinuitet I
(kap. P.1, 9.1)

Forelesning uke 35

Nøkkelbegrep:

- Kompletthetsegenskapen for reelle tall
- Følger
- Konvergens av følger

Introduksjon

π er et irrasjonalt tall, det vil si at $\pi \neq \frac{p}{q}$, hvor $p, q \in \mathbb{Z}$.
π dukker naturlig opp i geometriske problemer.
Men hva er den numeriske verdien til π?

Vi vet at $\sin(x) = 0 \quad \Longleftarrow \quad x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$
Kan vi finne x numerisk?

$$\sin(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(x) + x = x$$

Introduksjon

Vi løser den siste ligninga algoritmisk på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \\
&a_2 = \sin(a_1) + a_1 \\
&a_3 = \sin(a_2) + a_2 \\
&\vdots \\
&a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dette gir oss ei følge av reelle tall $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ideen er at for n stor nok, vil $a_n \approx a$ hvor

$$a = \sin(a) + a \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(a) = 0 \quad \Longleftarrow \quad a = \pi.$$

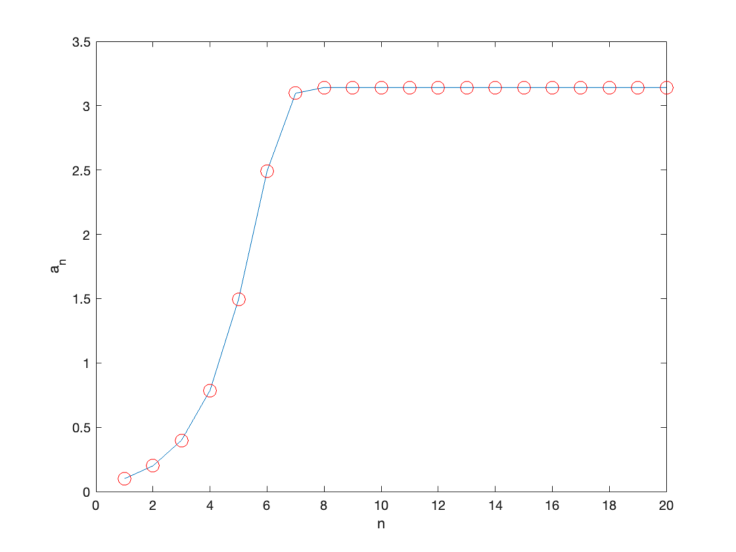
Introduksjon

$$a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n$$

Merk:

- Hva skjer om vi velger $a_1 = 0.1$?

Introduksjon



$$a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n \text{ med } a_1 = 0.1$$

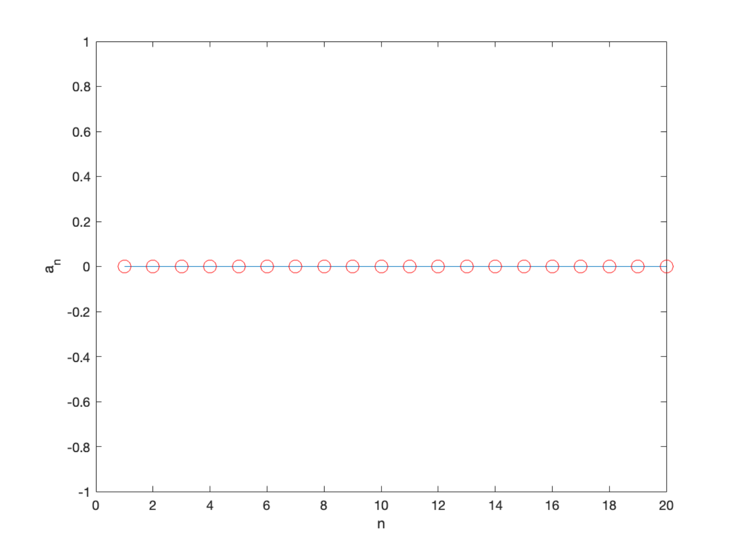
Introduksjon

$$a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n$$

Merk:

- Hva skjer om vi velger $a_1 = 0.1$?
- Hva skjer om vi velger $a_1 = 0$?

Introduksjon



$$a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n \text{ med } a_1 = 0$$

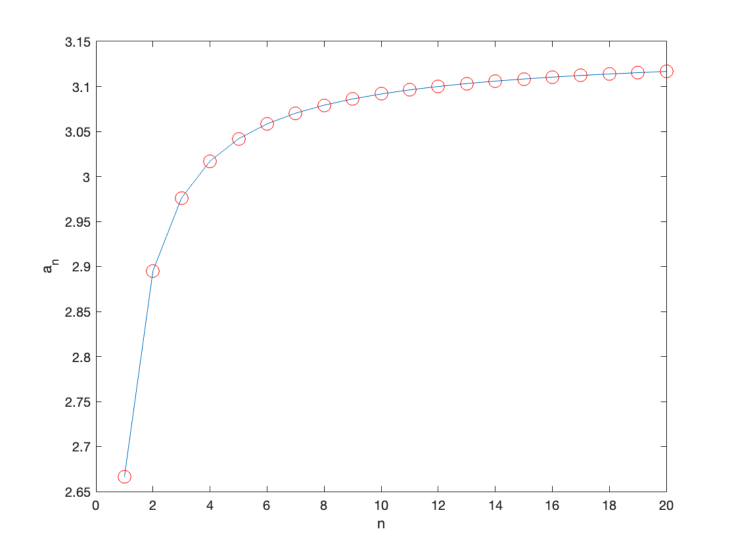
Introduksjon

$$a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n$$

Merk:

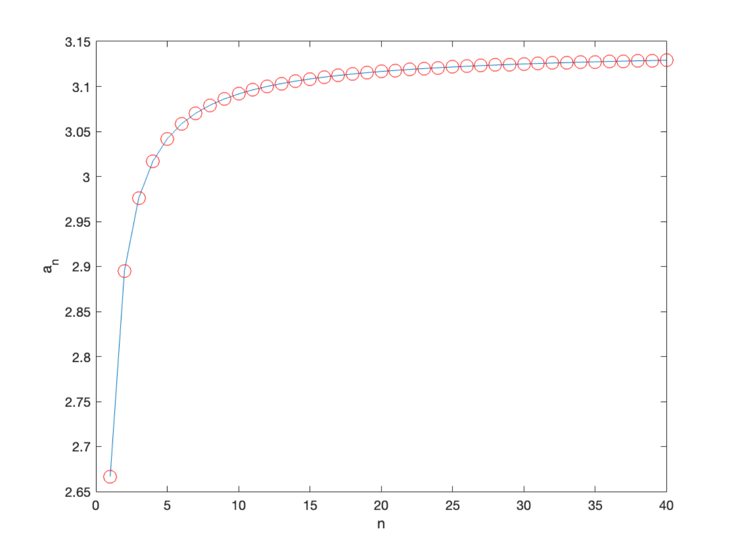
- Hva skjer om vi velger $a_1 = 0.1$?
- Hva skjer om vi velger $a_1 = 0$?
- Hvordan vet vi at vi er nærme nok π?
- $a_n = 4\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3})$ er en annen approksimasjon av π hvor alle a_n er rasjonale tall, dvs. $a_n = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Introduksjon



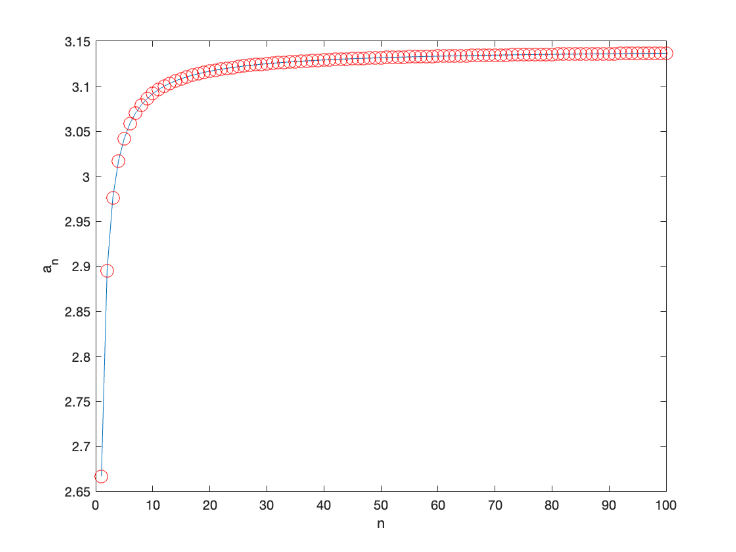
$$a_n = 4\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right) \text{ med } a_1 = \frac{8}{3}$$

Introduksjon



$$a_n = 4\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right) \text{ med } a_1 = \frac{8}{3}$$

Introduksjon



$$a_n = 4\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right) \text{ med } a_1 = \frac{8}{3}$$

De reelle tall (kap. P.1)

En mengde A er en samling med objekter.

Eksempel (Mengde)

- $\{-3, \pi, \sqrt{17}\}$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (naturlige tall)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (hele tall)
- $\mathbb{R} = \{\text{desimaltall med endelig eller uendelig antall desimaler}\}$ (reelle tall)
- $\emptyset = \{\}$ (den tomme mengden)

$x \in A \qquad \text{eller} \qquad x \notin A$

$A \subseteq B$ (A er en delmengde av B)

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$ (snittet av A og B)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$ (unionen av A og B)

$B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$ (differansen mellom A og B)

De reelle tall (kap. P.1)

En mengde A er en samling med objekter.

Eksempel (Mengde)

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (naturlige tall)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (hele tall)
- $\mathbb{R} = \{$desimaltall med endelig eller uendelig antall desimaler$\}$ (reelle tall)

$x \in A$ eller $x \notin A$

$A \subseteq B$ (A er en delmengde av B)

$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ og } x \in B\}$ (snittet av A og B)

$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ eller } x \in B\}$ (unionen av A og B)

$B \setminus A = \{x \in B \,|\, x \notin A\}$ (differansen mellom B og A)

En mengde kan være *oppad* begrenset.

En mengde kan være *nedad* begrenset.

De reelle tall (kap. P.1)

De rasjonale tallene er gitt ved

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{p}{q} \quad | \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}.$$

Tidligere i forelesningen så vi en følge av rasjonale tall som nærmet seg et irrasjonalt tall.
Vi kan defor ikke bare jobbe med rasjonale tall!

Kompletthetsegenskapen for reelle tall

Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde $A \subseteq \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

Merk:

- Dersom c er den minste øvre skranken til A, skriver vi $c = \sup A$ (supremum).
- Dersom c er den største nedre skranken til A, skriver vi $c = \inf A$ (infimum).

Følger og konvergens (kap. 9.1)

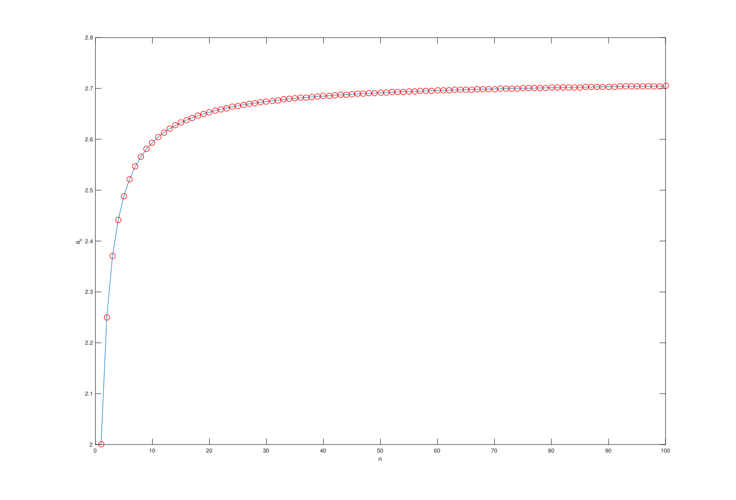
Eksempel (Følger)

- $a_n = 1,\ n \geq 1 \quad : \quad 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $a_n = \frac{n^2}{2^n},\ n \geq 1 \quad : \quad \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots$
- $a_1 = 0.1,\ a_{n+1} = \sin(a_n) + a_n,\ n \geq 2$

Definisjon (Følge)

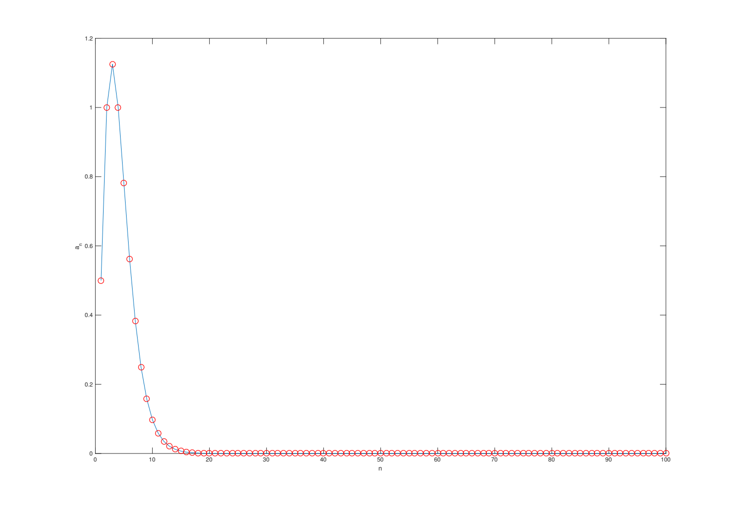
En følge av reelle tall, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, er ei (uendelig) liste av reelle tall.

Følger og konvergens (kap. 9.1)



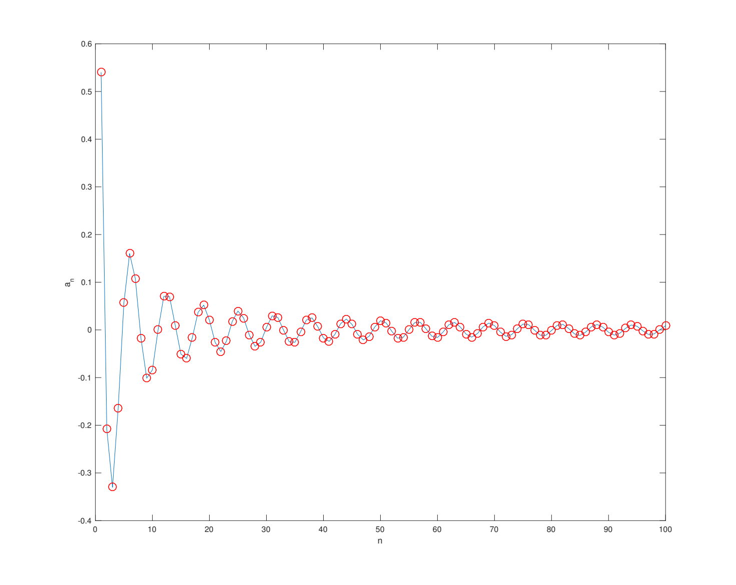
$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n,\ n \geq 1$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)



$$a_n = \frac{n^2}{2^n},\ n \geq 1$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)



$$a_n = \frac{1}{n}\cos(n), \; n \geq 1$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)

Eksempel ("Konvergens" 1)

La $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Finn et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - 0| < \frac{1}{2} \qquad \text{for alle } n \geq N.$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)

Eksempel ("Konvergens" 2)

La $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Finn et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - 0| < \frac{1}{101} \qquad \text{for alle } n \geq N.$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)

Eksempel ("Konvergens" 3)

La $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. For ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$, finn et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - 0| < \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq N.$$

Følger og konvergens (kap. 9.1)

Definisjon (Konvergens)

Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot $L \in \mathbb{R}$ dersom det for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq N.$$

Vi skriver "$\lim_{n\to\infty} a_n = L$" eller "$a_n \to L$ når $n \to \infty$".

Eksempel (Konvergens)

Følgen $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot 0.
(For ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$, fant vi tallet $N = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$.)

Definisjon (Divergens)

Følger som ikke konververger, sier vi at divergerer.

Følger og konvergens (kap. 9.1)

La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være to konvergente følger med

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Da er:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- Dersom $B \neq 0$, er $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B}$

Følger og konvergens (kap. 9.1)

Definisjon (Begrenset)

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er begrenset dersom det finnes en $M \geq 0$ slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

Eksempel

Følgen $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ er begrenset av 1.

Teorem 9.1

Dersom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer, så er den begrenset.

Teorem 9.2

En monoton (dvs. voksende eller avtagende) og begrenset følge er konvergent.