

## Anbefalte oppgaver uke 43

Høsten 2023

## Løsningsforslag

- 1 Vi setter  $f(x) = x^2 - 3$ . Da blir  $f'(x) = 2x$ , og iterasjonen blir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}.$$

Vi gjetter på at  $\sqrt{3}$  er cirka lik  $x_0 = 1.7$ . Bruk av iterasjonen over, gir tabellen:

$x_0$	1.7
$x_1$	1.7323529411764707
$x_2$	1.7320508339159093
$x_3$	1.7320508075688774
$x_4$	1.7320508075688772
$x_5$	1.7320508075688774
$x_6$	1.7320508075688772

Det ser ut som om iterasjonene har stabilisert seg, og  $\sqrt{3} \approx 1.732050807568877$ .

- 2 Først finner vi ut hvor mange løsninger som finnes. Observer at både  $\cos x$  og  $x^2$  er like funksjoner. Det betyr at dersom  $x_1$  er en løsning, det vil si at  $\cos x_1 = x_1^2$ , så er også  $-x_1$  en løsning.

Videre vet vi at  $x^2 > 1$  når  $|x| > 1$ , og at  $\cos x \leq 1$  for alle  $x$ . Altså må alle løsninger ligge i intervallet  $-1 \leq x \leq 1$ .

La

$$f(x) = \cos x - x^2.$$

Vi ønsker å bestemme alle  $x$  slik at  $f(x) = 0$ . Vi har at

$$f'(x) = -\sin x - 2x.$$

Det vil si at  $f'(x) < 0$  for  $x \in (0, 1]$ , slik at  $f(x)$  er synkende her. Altså kan det bare være en løsning på dette intervallet siden  $f$  er kontinuerlig. Endepunktet på intervallet,  $x = 0$ , er åpenbart ikke riktig løsning.

Vi konkluderer analysen vår med at det finnes akkurat to løsninger, en i intervallet  $(0, 1]$  og en i intervallet  $[-1, 0)$ .

Vi bruker så Newtons metode (side 225 i boka) til å bestemme roten i intervallet  $(0, 1]$ . I vårt eksempel får vi at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n^2}{-\sin x_n - 2x_n} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n^2}{\sin x_n + 2x_n}.$$

Som startpunkt bruker vi  $x_0 = 0.5$ . Vi utfører første iterasjon, og får

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - x_0^2}{\sin x_0 + 2x_0} = 0.5 + \frac{\cos 0.5 - 0.5^2}{\sin 0.5 + 2 \cdot 0.5} \approx 0.924206927293198 \approx 0.924.$$

Ved å iterere videre får vi følgende resultat:

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	0.5000000000000000	$6.28 \cdot 10^{-01}$
1	0.924206927293198	$-2.52 \cdot 10^{-01}$
2	0.829105755997418	$-1.19 \cdot 10^{-02}$
3	0.824146131728195	$-3.29 \cdot 10^{-05}$
4	0.824132312409912	$-2.56 \cdot 10^{-10}$
5	0.824132312302522	$1.11 \cdot 10^{-16}$
6	0.824132312302522	$1.11 \cdot 10^{-16}$

Vi ser at de to løsningene er  $x \approx \pm 0.824132312302522$ .

3 Vi skal finne maksimum og minimum for funksjonen

$$g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Siden  $\sin x$  er en oscillerende funksjon mellom  $-1$  og  $1$ , så vi kan forvente mange lokale maksimum og minimum for  $g(x)$ . Nevneren  $1+x^2$  monotont økende, slik at det globale maksimumspunktet må være det lokale maksimumet som ligger nærmest origo, og tilsvarende for det globale minimumspunktet.

For å finne kandidater til maksimum og minimum, regner vi først ut den deriverte,

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)\cos x - \sin x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser at  $g'(x) = 0$  når telleren er null. Vi ønsker altså å finne røtter til funksjonen

$$f(x) = (1+x^2)\cos x - 2x\sin x.$$

For å løse  $f(x) = 0$  bruker vi Newtons metode,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Den deriverte til  $f(x)$  er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos x + (1+x^2)(-\sin x) - (2\sin x + 2x\cos x) \\ &= -(1+x^2)\sin x - 2\sin x = -(3+x^2)\sin x. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte som i forrige oppgave itererer vi oss frem til løsningen. Merk at vi ikke kan velge  $x_0 = 0$ , siden  $f'(0) = 0$ . Vi velger derfor  $x_0 = 1.0$  i første omgang (husk at vi vet at globalt maksimum og minimum ligger nært null).

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	1.0000000000000000	$-6.02 \cdot 10^{-01}$
1	0.8210463079671654	$-6.09 \cdot 10^{-02}$
2	0.7983816444825249	$-9.50 \cdot 10^{-04}$
3	0.7980170858066054	$-2.45 \cdot 10^{-07}$
4	0.7980169918423763	$-1.60 \cdot 10^{-14}$
5	0.7980169918423702	$-2.22 \cdot 10^{-16}$

Deretter prøver vi  $x_0 = -1.0$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	-1.0000000000000000	$-6.02 \cdot 10^{-01}$
1	-0.8210463079671654	$-6.09 \cdot 10^{-02}$
2	-0.7983816444825249	$-9.50 \cdot 10^{-04}$
3	-0.7980170858066054	$-2.45 \cdot 10^{-07}$
4	-0.7980169918423763	$-1.60 \cdot 10^{-14}$
5	-0.7980169918423702	$-2.22 \cdot 10^{-16}$

Vi evaluerer så  $g$  i disse to punktene:

$$g(0.7980169918423702) \approx 0.437,$$

$$g(-0.7980169918423702) \approx -0.437.$$

Vi konkluderer med at maksimum til  $g$  er tilnærmet lik 0.437 og minimum er tilnærmet lik  $-0.437$ .

Det at minimumspunktet er lik minus maksimumspunktet er ikke tilfeldig. Dette følger av at  $\sin x$  og  $1 + x^2$  er henholdsvis odde og like funksjoner, slik at også  $g(x)$  er odde.

4 [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4100/eksamen/lf\\_tma4100\\_2016h.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2016h.pdf)

5 Me vil finna den faktiske feilen ved å bruka trapesmetoden med eitt delintervall for å tilnærma  $\int_0^1 x^2 dx$ . Den eksakte verdien av dette integralet er  $1/3$ , medan

$$T_1 = \frac{1}{2} [0^2 + 1^2] = \frac{1}{2}.$$

Dermed vert feilen

$$\left| \int_0^1 x^2 dx - T_1 \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}.$$

Frå feilestimatet på side 376 i boka (Teorem 4), har ein

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2},$$

der  $f''(x) \leq K$  på  $[a, b]$ . Sidan  $(x^2)'' = 2$  har ein ved innsetjing i estimatet ovanfor at

$$\left| \int_0^1 x^2 dx - T_1 \right| \leq \frac{2(1-0)^3}{12(1)^2} = \frac{1}{6}.$$

Dermed har me for dette integralet at feilestimatet er likt den faktiske feilen, som viser at ein ikkje kan forbetra konstanten 12 i estimatet. Det vil seia at denne ikkje kunne vore større, for då hadde feilestimatet vore mindre enn den faktiske feilen.

6 Me vil finna den faktiske feilen ved å bruka Simpsons metode med to delintervall for å tilnærma  $\int_0^1 x^4 dx$ . Den eksakte verdien av dette integralet er  $1/5$ , medan

$$S_2 = \frac{1}{6} \left[ 0^4 + 4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 + 1^4 \right] = \frac{5}{24}.$$

Dermed vert feilen

$$\left| \int_0^1 x^4 dx - T_1 \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{5}{24} \right| = \frac{1}{120}.$$

Frå feilestimatet på side 381 i læreboka (Teorem 5), har ein

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4},$$

der  $f^{(4)}(x) \leq K$  på  $[a, b]$ . Sidan  $(x^4)^{(4)} = 24$  har ein ved innsetjing i estimatet ovanfor at

$$\left| \int_0^1 x^4 dx - S_2 \right| \leq \frac{24(1-0)^5}{180(2)^4} = \frac{1}{120}.$$

Dermed har me for dette integralet at feilestimatet er likt den faktiske feilen, som viser at ein ikkje kan forbetra konstanten 180 i estimatet. Det vil seia at denne ikkje kunne vore større, for då hadde feilestimatet vore mindre enn den faktiske feilen.

7 Vi evaluerer først integralet eksakt,

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Vi anvender så Simpsons metode (side 378 i boka) med  $n = 2$  på intervallet  $[0, 1]$ . Det vil si at  $h = 1/2$  og  $y_i = x_i^3$ , for  $i = 0, 1, 2$ , der  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$  og  $x_2 = 1$ . Vi har da at

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{h}{3}(x_0^3 + 4x_1^3 + x_2^3) \\ &= \frac{1}{6} \left( 0 + 4 \left( \frac{1}{2} \right)^3 + 1 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vi har altså vist at  $\int_0^1 x^3 dx = S_2$ .

8 [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4100/eksamen/lf\\_tma4100\\_2017h.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2017h.pdf)

9 [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4100/eksamen/lf\\_tma4100\\_2023k.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2023k.pdf)