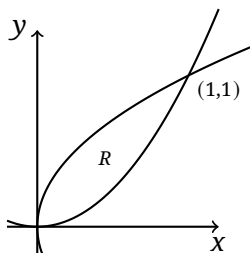


Anbefalte oppgaver uke 42

Høsten 2023

Løsningsforslag

- 1 Vi tegner først opp området R i xy -planet som skal roteres om x -aksen for å danne omdreingslegemet S .



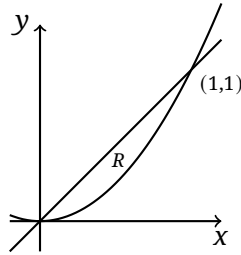
Først bruker vi skivemetoden for å finne volumet V til S . Skivene har her et hull i midten med radius $y = x^2$ og en ytre radius $y = \sqrt{x}$. Volumet av en infinitesimal tynn skive med bredde dx er da $dV = \pi((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx$. Ved å summere over alle slike skiver finner vi det totale volumet til S :

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=1} dV \\ &= \pi \int_0^1 x - x^4 dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Vi bruker nå sylinderskallmetoden for å komme fram til det samme svaret. Vi inverterer funksjonene som beskriver R slik at $y = \sqrt{x}$ tilsvare $x = y^2$ og $y = x^2$ tilsvare $x = \sqrt{y}$. Sylinderskallene har radius y og høyde $\sqrt{y} - y^2$. Volumet av et infinitesimal sylinderskall med tykkelse dy blir da $dV = 2\pi y(\sqrt{y} - y^2)$. Ved å summere over alle slike sylinderskall finner vi det totale volumet til S :

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=1} dV \\ &= 2\pi \int_{y=0}^{y=1} y^{3/2} - y^3 dy \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{4}{4} y^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

- 2] Vi tegner først opp området R i xy -planet som skal roteres om henholdsvis x - og y -aksen.



Vi ser at kurvene $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$ skjærer hverandre i $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = (1, 1)$.

- a) Vi roterer R om x -aksen. Vi deler området inn i skiver med ytre radius x og indre radius x^2 . Volumet av omdreiningslegemet blir da

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

- b) Vi roterer R om y -aksen. Vi deler området inn i sylinderskall med radius x og høyde $x - x^2$. Volumet av omdreiningslegemet blir da

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x (f(x) - g(x)) dx = 2\pi \int_0^1 x (x - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

- 3] Legemet er 6 meter høyt og det horisontale tversnittet z meter over grunnflata er et rektangel med lengde $2+z$ meter og bredde $8-z$ meter. En tynn horisontal skive av legemet med høyde dz vil da ha volum $dV = (2+z)(8-z) dz$. Det totale volumet finner vi ved å integrere fra $z = 0$ til $z = 6$ meter:

$$\begin{aligned} V &= \int_{z=0}^{z=6} dV \\ &= \int_0^6 (2+z)(8-z) dz \\ &= \int_0^6 (16 + 6z - z^2) dz \\ &= \left(16z + 3z^2 - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^6 \\ &= 96 + 108 - 72 \\ &= 132, \end{aligned}$$

der enheten er m^3 .

- 4] Lengden s til en kurve $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er gitt som (se side 407 i læreboken)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Kurven vår er gitt som $y^2 = (x - 1)^3$, så vi deriverer derfor implisitt,

$$\begin{aligned} 2y \frac{dy}{dx} &= 3(x - 1)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3(x - 1)^2}{2y}, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{9(x - 1)^4}{4y^2} = \frac{9(x - 1)^4}{4(x - 1)^3} = \frac{9}{4}(x - 1). \end{aligned}$$

Legg merke til at $\frac{dy}{dx}$ er definert for alle $x, y > 0$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x - 1)} dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{9x - 5} dx. \end{aligned}$$

Vi lar så $u = 9x - 5$ slik at $du = 9 dx$ eller $dx = \frac{1}{9} du$. Integrasjonsgrensene blir $u_1 = 9 \cdot 1 - 5 = 4$ og $u_2 = 9 \cdot 2 - 5 = 13$.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{18} \int_4^{13} u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{18} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{13} \\ &= \frac{1}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right) \approx 1.44. \end{aligned}$$

5 Vi bruker formelen på side 411 i læreboken, og får

$$A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^{16} \sqrt{1 + u} du = \frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 1).$$

Merk at vi ikke trenger absoluttverditegn på x , siden $0 \leq x \leq 2$.

6 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2016h.pdf

7 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/tma4100_2013-08-05_bm.pdf

8 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2018k.pdf

9 Oppgave 4 på LF til eksamen høst 2022.