

Anbefalte oppgaver uke 41

Høsten 2023

Løsningsforslag

1 Vi skal evaluere det ubestemte integralet

$$I = \int (x^2 - 2x)e^{kx} dx.$$

Vi starter med å dele opp integralet i to,

$$I = \int x^2 e^{kx} dx - 2 \int x e^{kx} dx.$$

La oss først se på integralet $I_2 = \int x e^{kx} dx$. Vi bruker delvis integrasjon med $U = x$ og $dV = e^{kx} dx$. Da blir $dU = dx$ og $V = \frac{1}{k}e^{kx}$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x e^{kx} dx = \int U dV = UV - \int V dU \\ &= x \frac{1}{k} e^{kx} - \int \frac{1}{k} e^{kx} dx \\ &= \frac{x}{k} e^{kx} - \frac{1}{k^2} e^{kx} + \tilde{C} \\ &= \frac{1}{k} e^{kx} \left(x - \frac{1}{k} \right) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

For å evaluere $I_1 = \int x^2 e^{kx} dx$ bruker vi samme metode, men nå setter vi $U = x^2$ og $dV = e^{kx} dx$, slik at $dU = 2x dx$ og $V = \frac{1}{k}e^{kx}$. Dette gir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2 e^{kx} dx = \int U dV = UV - \int V dU \\ &= x^2 \frac{1}{k} e^{kx} - \int \frac{1}{k} e^{kx} 2x dx \\ &= \frac{x^2}{k} e^{kx} - \frac{2}{k} \int x e^{kx} dx \\ &= \frac{x^2}{k} e^{kx} - \frac{2}{k} I_2 \\ &= \frac{x^2}{k} e^{kx} - \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} e^{kx} \left(x - \frac{1}{k} \right) - \frac{2}{k} \tilde{C} \\ &= \frac{x^2}{k} e^{kx} - \frac{2x}{k^2} e^{kx} + \frac{2}{k^3} e^{kx} - \frac{2}{k} \tilde{C} \\ &= \frac{1}{k} e^{kx} \left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2} \right) - \frac{2}{k} \tilde{C}. \end{aligned}$$

Vi summerer nå sammen de to integralene og får

$$\begin{aligned} I &= I_1 - 2I_2 = \frac{1}{k} e^{kx} \left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2} - 2x + 2\frac{1}{k} \right) - \frac{2}{k} \tilde{C} + \tilde{C} \\ &= \frac{e^{kx}}{k^3} \left(k^2 x^2 - 2kx + 2 - 2k^2 x + 2k \right) + C \\ &= \frac{e^{kx}}{k^3} \left(k^2(x-1)x - 2k(x-1) + 2 \right) + C. \end{aligned}$$

I utregningene over har vi satt $C = -\frac{2}{k} \tilde{C} + \tilde{C}$.

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.

2 Me set $U = \sin^{-1}(x)$ og $dV = dx$. Då får me

$$\begin{aligned} \int \left(\sin^{-1}(x) \right)^2 dx &= \int U^2 dV \\ &= U^2 V - 2 \int V U dU \\ &= x \left(\sin^{-1}(x) \right)^2 - 2 \int x \sin^{-1}(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \end{aligned}$$

der me har brukt uttrykket for den deriverte av arcsin på side 194 i læreboka. Igjen har me eit integral med ein invers trigonometrisk funksjon i integranden, så me gjentar prosedyren ved å setja $U = \sin^{-1}(x)$ og $dV = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ved å studera dV kan ein sjå at dette er den deriverte av $-\sqrt{1-x^2}$. Dette kan ein òg visa ved å integrera dV med omsyn på x og bruk av substitusjonen $u = 1 - x^2$. Dermed har ein

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1}(x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int U dV \\ &= UV - \int V dU \\ &= \sin^{-1}(x)(-\sqrt{1-x^2}) - \int (-\sqrt{1-x^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} + x + C_0. \end{aligned}$$

Ved å kombinera dei føregåande uttrykka får ein svaret

$$\begin{aligned} \int \left(\sin^{-1}(x) \right)^2 dx &= x \left(\sin^{-1}(x) \right)^2 - 2 \left(-\sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} + x + C_0 \right) \\ &= x \left(\sin^{-1}(x) \right)^2 + 2 \sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C. \end{aligned}$$

3 Vi ser at integranden er en rasjonal funksjon der nevneren er av høyere orden enn telleren. Vi bruker derfor delbrøkoppspalting. Telleren, $3x^2 + 8x - 3$, har røttene $x = \frac{1}{3}$ og $x = -3$, slik at vi kan skrive integranden som

$$\frac{x}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{x}{3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 3)} = \frac{x}{(3x - 1)(x + 3)}.$$

Vi søker nå å skrive dette på formen

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+3},$$

der A og B er konstanter. Vi multipliserer begge sider med felles faktor, og får at

$$x = A(x+3) + B(3x-1) = (A+3B)x + (3A-B).$$

Vi må altså kreve at

$$\begin{aligned} A + 3B &= 1, \quad \text{og} \\ 3A - B &= 0. \end{aligned}$$

Den andre ligningen gir $B = 3A$, som innsatt i den første ligningen gir at

$$A + 3 \cdot 3A = 1 \implies A = \frac{1}{10}.$$

Dette gir igjen

$$B = 3A = \frac{3}{10}.$$

Vi er nå klare til å evaluere integralet,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(3x-1)(x+3)} dx &= \int \left(\frac{1}{10(3x-1)} + \frac{3}{10(x+3)} \right) dx \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \ln(3x-1) + \frac{3}{10} \ln(x+3) + C \\ &= \frac{1}{30} (\ln(3x-1) + 9 \ln(x+3)) + C \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\frac{d}{dx} \ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \cdot a$ slik at $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$.

4 Me antar at $a \neq 0$, i motsett tilfelle er svaret ganske enkelt

$$\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Ved å bruka konjugatsetninga to ganger kan ein skriva integranden som

$$\frac{1}{x^4 - a^4} = \frac{1}{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)} = \frac{1}{(x-a)(x+a)(x^2 + a^2)}.$$

Me ønsker no å delbrøksoppspalta integranden, og bruker teoremet på side 347–348 i læreboka,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{Cx+D}{x^2+a^2} \\ &= \frac{A(x+a)(x^2+a^2) + B(x-a)(x^2+a^2) + (Cx+D)(x^2-a^2)}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}, \end{aligned}$$

som impliserer

$$A(x+a)(x^2+a^2) + B(x-a)(x^2+a^2) + (Cx+D)(x^2-a^2) = 1.$$

Etter litt opprydding får ein at dette er ekvivalent med

$$(A+B+C)x^3 + (a(A-B)+D)x^2 + a^2(A+B-C)x + a^2(a(A-B)-D) = 1.$$

Frå uttrykket ovanfor får ein då likningssystemet

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ a(A-B)+D &= 0 \\ A+B-C &= 0 \\ a^3(A-B)-a^2D &= 1 \end{aligned}$$

Ved å subtrahera tredje likning frå første får ein at $2C = 0$, altså $C = 0$. Dette betyr at $A+B = 0$. Ved å gonga andre likning med a^2 og subtrahera denne frå siste likning får ein $-2a^2D = 1$, altså er $D = -\frac{1}{2a^2}$. Om ein i staden adderer uttrykka får ein $2a^3(A-B) = 1$, og kombinert med $A+B = 0$ gjev dette $A = \frac{1}{4a^3}$ og $B = -\frac{1}{4a^3}$.

Dermed kan ein løysa integralet på følgjande vis,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4-a^4} &= \frac{1}{4a^3} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{4a^3} \int \frac{dx}{x+a} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} \\ &= \frac{1}{4a^3} \ln|x-a| - \frac{1}{4a^3} \ln|x+a| - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \end{aligned}$$

der ein har nytta resultatata frå side 342 i læreboka til å evaluera dei tre integrala.

- 5 Me ser at integranden inneheld ein faktor på forma $\sqrt{a^2-x^2}$, så det er naturleg å bruka substitusjonen $x = a \sin(\theta)$, her med $a = 3$. Merk at den opphavelige integranden berre er definert for $-3 \leq x \leq 3$, og me må derfor velja eit passande definisjonsområde $[\theta_1, \theta_2]$ for den nye variabelen θ . Området må oppfylle at $-3 \leq 3 \sin(\theta) \leq 3$ for $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Dessutan må kvar verdi mellom -3 og 3 berre bli tatt ein gong av $3 \sin(\theta)$, på same måte som for x . Eit passande definisjonsområde for θ kan derfor vera $[-\pi/2, \pi/2]$.

Dermed får me

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3 \cos(\theta) d\theta}{3 \sin(\theta) \sqrt{9(1-\sin^2(\theta))}} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sin(\theta) \sqrt{1-\sin^2(\theta)}} \\ &= \frac{1}{3} \int \csc(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \ln|\csc(\theta) + \cot(\theta)| + C. \end{aligned}$$

For å skriva dette om til eit uttrykk som avhenger av x kan ein nytta Figur 6.1 på side 349 i læreboka til å fastslå at $\csc(\theta) = \frac{3}{x}$ og $\cot(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Dermed har ein at svaret er

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} &= -\frac{1}{3} \ln\left|\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + C \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x| - \ln|3 + \sqrt{9-x^2}|) + C. \end{aligned}$$

- 6] Me nyttar substitusjonen på side 355 i læreboka, $x = \tan(\theta/2)$, som medfører $\cos(\theta) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin(\theta) = \frac{2x}{1+x^2}$ og $d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$. Integralgrensene blir følgjeleg $x = \tan(0) = 0$ og $x = \tan(\pi/4) = 1$. Dermed får me

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)} &= \int_0^1 \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+2x}{1+x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\ &= \ln(1+x) \Big|_0^1 \\ &= \ln(2). \end{aligned}$$

- 7] Vi gjenkjenner integralet som et uegentlig integral av type 1 (Definisjon 1, side 364 i læreboken). Vi bestemmer først det ubestemte integralet $\int \frac{dx}{x \ln x}$. Ved å gjøre substitusjonen $u = \ln x$, har vi at $du = \frac{1}{x} dx$, slik at

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\ln x) + C.$$

Vi har nå at

$$\begin{aligned} \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(\ln R) - \ln(\ln e)] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(\ln R). \end{aligned}$$

Siden $\lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty$ må også $\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(\ln R) = \infty$, slik at integralet divergerer.

- 8] For å fastslå om integralet

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(x)}$$

konvergerer eller divergerer er det enklere om me kan estimere integranden med ein funksjon som enkelt kan integreres over $[2, \infty)$. Merk at på dette intervallet vil $x > \sqrt{x}$ og $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dermed har ein

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(x)} > \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x},$$

der integralet til høgre kan løysast ved substitusjonen $u = \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(R)} \frac{du}{u} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(\ln(R)) - \ln(\ln(2))] = \infty.$$

Sidan dette nedre estimatet divergerer vil det opphævelege integralet òg divergera.

- 9] Oppgave 5 på LF til eksamen høst 2022.