TMA4100 Matematikk 1

Anbefalte oppgaver uke 39

Høsten 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ For å vise at f er en injektiv (én-entydig) funksjon, ser vi på den deriverte,

$$f'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ for alle x. Det vil si at f er strengt voksende og derfor injektiv.
Den inverse til f finner vi å la $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$x = f(y) = \frac{y}{1+y},$$

og vi finner $f^{-1}(x)$ ved å løse for y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{1+y} \\ (1+y)x &= y \\ x + xy - y &= 0 \\ y(x-1) &= -x \\ y &= -\frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Altså er

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Vi ser at både telleren og nevneren i f er definert for alle verdier av $x \in \mathbb{R}$, men at f har en singularitet i $x = -1$. Derfor er definisjonsmengden til f hele $\mathbb{R}$ utenom punktet -1. Dette kan vi skrive slik:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Tilsvarende ser vi at

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Det følger nå av egenskapene til inverse funksjoner (side 169 i læreboka) at verdimengdene (*range*) til f og f^{-1} er

$$\begin{aligned} V_f &= D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ V_{f^{-1}} &= D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Vi starter med å derivere f (for $x \neq 0$):

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 0, \\ \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} & x > 0. \end{cases}$$

Siden $3x^2 > 0$ på $(-\infty, 0)$ og $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 > 0$ på $(0, \infty)$ kan vi konkludere med at f er strengt voksende på hele $\mathbb{R}$. Dermed er f injektiv (én-entydig) og har en invers funksjon, f^{-1}.

For å finne f^{-1} merker vi oss først at $f(x) \geqslant 0$ hvis og bare hvis $x \geqslant 0$, og $f(x) < 0$ hvis og bare hvis $x < 0$. La oss først kikke på $y \geqslant 0$, og sette $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$x = f(y) = \sqrt[3]{y} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = y = x^3 \text{ når } x \geqslant 0.$$

Videre ser vi på tilfellet $y < 0$. Vi lar $y = f^{-1}(x)$ og finner at

$$x = f(y) = y^3 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x} \text{ når } x < 0.$$

Dermed er

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x < 0, \\ x^3 & x \geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Vi starter med å finne den deriverte til f,

$$f'(x) = 6x^2.$$

Vi ser at $f'(x) \geqslant 0$ for alle x med $f'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Dette viser at f er injektiv og at den har en invers.

Vi finner så f^{-1} ved å la $y = f^{-1}(x)$ og løse for y,

$$x = f(y) = 1 + 2y^3 \quad \Longrightarrow \quad y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Det finnes nå to måter å regne ut $\left(f^{-1}\right)'(x)$ på, enten direkte eller via formelen side 170 i læreboken. Hvis vi bruker formelen får vi at

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{6\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Alternativt, hvis vi deriverer f^{-1} direkte ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon, får vi

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$\boxed{4}$ Vi forenkler uttrykket ved å bruke reglene for logaritmer, side 174 i boka.

$$\begin{aligned}
&\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\log_\pi \sin x \\
&\qquad = \log_\pi\left((1-\cos x)(1+\cos x)\right) - 2\log_\pi \sin x \\
&\qquad = \log_\pi(1-\cos^2 x) - 2\log_\pi \sin x \\
&\qquad = \log_\pi \sin^2 x - 2\log_\pi \sin x \\
&\qquad = \log_\pi \sin^2 x - \log_\pi \sin^2 x \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi begynner med definisjonen på log

$$a = b^{\log_b a}.$$

Denne ligningen opphøyer vi i $\log_a x$, og får

$$x = a^{\log_a x} = b^{(\log_b a)(\log_a x)}.$$

Til slutt tar vi $\log_b$ til hele uttrykket og får

$$\log_b x = \log_b \left(b^{(\log_b a)(\log_a x)}\right) = (\log_b a)(\log_a x).$$

Dette uttrykket kan vi igjen skrive som

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

$\boxed{6}$ Vi ser først på det første leddet. Ved å bruke Teorem 3, punkt (i), side 179 i læreboken og deretter at e og ln er inverse av hverandre slik at $e^{\ln x} = x$ (se side 179 i læreboken), får vi at

$$e^{2\ln\cos x} = \left(e^{\ln\cos x}\right)^2 = (\cos x)^2.$$

På det andre leddet bruker vi også at e og ln er inverse av hverandre, men nå slik at $\ln e^x = x$. Da får vi at

$$\left(\ln e^{\sin x}\right)^2 = (\sin x)^2.$$

Hvis vi summerer de to leddene står igjen med

$$e^{2\ln\cos x} + \left(\ln e^{\sin x}\right)^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

$\boxed{7}$ Vi deriverer uttrykket ved gjentatt bruk av kjerneregelen for derivasjon. Husk at $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ og $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
&= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\frac{d}{dx}|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
&= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) \\
&= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}}\frac{d}{dx}(x^2 - a^2)\right) \\
&= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}}2x\right).
\end{aligned}$$

Vi bruker så at $|b||b| = b^2$ for et vilkårlig tall b. I vårt tilfelle kan vi sette $b = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, slik at vi får

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) \\
&= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{x\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/lf_tma4100_2013h.pdf`

$\boxed{9}$ For å regne ut den deriverte av utykket $y = x^{\sqrt{x}}$ er det fordelaktig å ta logaritmen av begge sider først. Gjør vi dette får vi

$$\ln(|y|) = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\ln(|x|).$$

Deriverer vi venstre side med hensyn på x får vi

$$\operatorname{sgn}(y)\frac{dy}{dx}\frac{1}{|y|} = \frac{dy}{dx}\frac{1}{\operatorname{sgn}(y)\,|y|} = \frac{dy}{dx}\frac{1}{y},$$

mens venstre side blir

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(|x|) + \sqrt{x}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|} = \frac{\ln(|x|)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Dermed blir den deriverte

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}}\frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

En av de store fordelene med å bruke notasjonen $\frac{d}{dx}$ er at vi sier hvilken variabel vi deriverer med hensyn på. Om vi ønsker å derivere med hensyn på y istedenfor kan vi skrive $\frac{d}{dy}$. Deriverer vi begge sider av

$$\ln(|y|) = \sqrt{x}\ln(|x|)$$

med hensyn på y får vi på venstresiden

$$\frac{\operatorname{sgn}(y)}{|y|} = \frac{1}{y}$$

og på høyresiden

$$\frac{dx}{dy}\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(|x|) + \frac{dx}{dy}\sqrt{x}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|} = \frac{dx}{dy}\frac{\ln(|x|)}{2\sqrt{x}} + \frac{dx}{dy}\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{dx}{dy}\frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Dermed blir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}\frac{2\sqrt{x}}{\ln(|x|) + 2}.$$