Anbefalte oppgaver uke 37

Høsten 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi bruker definisjonen for ikke-vertikale tangentlinjer (side 97 i læreboken). Tangentlinja gjennom et punkt (x_0, y_0) er gitt ved

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

I vårt tilfelle er $x_0 = 1$ og $y_0 = \sqrt{5 - 1^2} = 2$. Stigningstallet m til tangentlinja i et vilkårlig punkt er gitt ved

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}\right)\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(5-(x+h)^2\right) - \left(5-x^2\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5 - x^2 - 2hx - h^2 - 5 + x^2}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 2hx}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 2x}{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= -\frac{\lim_{h\to 0} h + 2x}{\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}.
\end{aligned}$$

I det første steget har vi brukt metoden med å multiplisere teller og nevner med den konjugerte til telleren. I det siste steget har vi brukt Teorem 2, punkt 5, side 69 i læreboken.

Når $h \to 0$ har vi nå at telleren går mot $2x$ og nevneren går mot $2\sqrt{5 - x^2}$. Dette gir

$$m = \frac{-2x}{\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

Ved å sette $x = 1$, får vi $m = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$.

Tangentkurven blir nå

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 2 = \frac{1}{2}(5 - x).$$

Observasjon: Vi kunne ha satt inn for $x = 1$ allerede fra starten av når vi regner ut m. Det ville gitt noe enklere regning, men vi har her valgt å vise hvordan dette kan gjøres mer generelt. Merk også at uttrykket vi får for m er lik den deriverte av kurven vi ser på. Merk også at stigningstallet kan finnes mye enklere ved å derivere funksjonen og sette inn $x = 1$, men her var det meningen å bruke definisjonen av tangent.

$\boxed{2}$ Funksjonen

$$f(x) = |x^2 + 3x + 2|$$

har nullpunkter i $x = -1$ og $x = -2$, og den er ikke deriverbar i disse punktene. For $x = -1$ er grunnen at

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}.$$

Forklaringen for punktet $x = 2$ er identisk. (Vink: Det kan være lurt å tegne grafen til funksjonen.)

$\boxed{3}$ Det er to måter å gjøre oppgaven på.

Metode 1 Vi har at for alle $a > 0$ den deriverte er gitt med

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}.$$

Bruker vi hintet får vi at

$$x - a = \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-2}\sqrt[n]{a} + \cdots + \sqrt[n]{a}^{n-1}\right)$$

og dermed blir grensen

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-2}\sqrt[n]{a} + \cdots + \sqrt[n]{a}^{n-1}\right)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-2}\sqrt[n]{a} + \cdots + \sqrt[n]{a}^{n-1}\right)} \\ &= \frac{1}{n\sqrt[n]{a}^{n-1}} = \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

Metode 2 Metode 2 er knyttet opp mot inversfunksjoner som vi skal lære mer om senere i kurset. La $g(x) = x^n$. Da er

$$g(f(x)) = g\left(\sqrt[n]{x}\right) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Om vi bruker kjerneregelen får vi at

$$g'(f(x))f'(x) = (x)' = 1.$$

Løser vi for f' får vi

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Vi har vist tidligere at $g'(x) = nx^{n-1}$. Dermed får vi at

$$g'(f(x)) = g'\left(\sqrt[n]{x}\right) = n\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = nx^{\frac{n-1}{n}}.$$

Om vi setter inn i formelen for f' får vi nå

$$f'(x) = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}.$$

$\boxed{4}$ Vi starter med å derivere uttrykket ved hjelp av produktregelen for n faktorer (side 112 i læreboken), her med $n = 4$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big)\\ &\quad = 1(1+2t)(1+3t)(1+4t) + (1+t)2(1+3t)(1+4t)\\ &\qquad + (1+t)(1+2t)3(1+4t) + (1+t)(1+2t)(1+3t)4.\end{aligned}$$

Vi setter deretter inn for $t = 0$ og får at

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big)\Big|_{t=0}\\ &\qquad = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 4\\ &\qquad = 1+2+3+4 = 10.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Her er det lurt å skrive om funksjonen til delt forskrift:

$$f(x) = |1-x^2| = \begin{cases} x^2-1 & \text{hvis } x < -1 \text{ eller } x \geqslant 1\\ 1-x^2 & \text{hvis } -1 \leqslant x < 1.\end{cases}$$

Nå er det bare å derivere disse delene hver for seg, og vi får

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x < -1 \text{ eller } x > 1\\ -2x & \text{hvis } -1 < x < 1.\end{cases}$$

Merk at $f'(x)$ ikke er definert i $x = \pm 1$; dette fremgår av ulikhetene i uttrykket.

$\boxed{6}$ Formelen er

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Hvis $n = 1$, er

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{-1}{x^2}$$

som er den korrekte deriverte, og vi ser at formelen stemmer. Anta så at formelen stemmer for $n = k-1$. I så fall er

$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

Dette medfører at dersom formelen stemmer for $n = k-1$, stemmer den også for $n = k$, og induksjonsargumentet er fullført. Formelen gjelder for alle n.

$\boxed{7}$ Vi begynner med å skrive om ulikheten til $\frac{\sin x}{x} > \cos x$, ($\tan x = \sin x/\cos x$) og beviser at denne holder for $x \in (0, \pi/2)$. Siden $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, gir sekantsetningen (middelverditeoremet) med $a = 0$ og $b = x$ at det finnes en $c \in (0, x)$ slik at $\frac{\sin x}{x} = \cos c$. Siden $\cos x$ er strengt avtagende på $(0, \pi/2)$, har vi $\frac{\sin x}{x} = \cos c > \cos x$, og følgelig har vi $\tan x > x$ på $(0, \pi/2)$.

$\boxed{8}$ `https://wiki.math.ntnu.o/_media/tma4100/eksamen/sif5003_2001-07-31_lf.pdf`