Anbefalte oppgaver uke 46

Høsten 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi starter med å skrive om rekken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\left(x-\frac{1}{4}\right)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x-\tfrac{1}{4}\right)^n,$$

der $a_n = 4^n/n^n$. Vi gjenkjenner dette som en potensrekke med konvergenssentrum i $x = 1/4$. For å finne konvergensradiusen, R, ser vi på grensen

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{4^n}{n^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 4\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 4\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\ &= 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 4\cdot 0\cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at $R = \infty$ og at rekken konvergerer for alle x.

$\boxed{2}$ Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

La oss istedenfor studere potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Observer at ved å sette $x = 1/2$ er denne lik rekken gitt i oppgaven.

Den andre summen i rekken er en geometrisk rekke, og vi vet at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{når } |x| < 1.$$

La oss nå følge fremgangsmåten i eksemplene 4 og 6 på side 538–540 i boka. Vi deriverer uttrykket over med hensyn på x,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\ \frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ 1+2x+3x^2+\cdots &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Vær oppmerksom på at denne ligningen også gjelder for $|x| < 1$.

Legg så merke til at det første leddet i den første summen i potensrekken vår er null, slik at vi har at

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

I den siste likheten har vi brukt uttrykket vi fant ved derivasjon ovenfor.

Vi har altså vist at

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad \text{når } |x| < 1.$$

Spesielt, for $x = 1/2$, har vi vist at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

$\boxed{3}$ Vi bruker den trigonometriske identiteten $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ og skriver om det oppgitte uttrykket,

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}.$$

Vi bruker så taylorrekken til $\cos(x)$ om $x = 0$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Ved å sette denne inn i uttrykket over får vi at

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2} &= \frac{2 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}. \end{aligned}$$

Siden taylorrekken til $\cos x$ om $x = 0$ er gyldig for alle x, er også denne det.

$\boxed{4}$ Vi skal finne taylorrekken til funksjonen

$$L(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

om $x = 0$. Vi bruker den kjente rekken til $\cos(x)$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Ved å bruke substitusjonen $x = t^2$, finner vi at

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \cdots .$$

Vi kan nå finne taylorrekken til $L(x)$ om $x = 0$ ved å integrere opp denne ledd for ledd,

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \cdots\right) dt \\ &= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} x^{4n+1}. \end{aligned}$$

Siden taylorrekken til $\cos x$ om $x = 0$ er gyldig for alle x, er denne også det.

$\boxed{5}$ Med $x = 0.5$ har vi fra forrige oppgave at

$$L(0.5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\, 2^{4n+1}}.$$

Dette er en alternerende rekke. Videre ser vi at $|a_n|$ er avtagende, slik at $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$ for alle $n \geqslant 0$, og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Altså vet vi fra den alternerende rekke-testen at denne rekken konvergerer. Dersom vi lar s_N være summen av alle ledd opp til $n = N$,

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\, 2^{4n+1}},$$

vet vi at feilen er begrenset av absoluttverdien til det neste leddet. Det vil si at

$$|L(0.5) - s_N| \leqslant |a_{N+1}| = \frac{1}{(4N+5)(2N+2)!\, 2^{4N+5}}.$$

Vi ønsker å finne $L(0.5)$ med tre desimalers nøyaktighet. Dette er oppfylt når

$$\frac{1}{(4N+5)(2N+2)!\, 2^{4N+5}} < 0.0005.$$

Ved å sette inn for ulike verdier av N, ser vi at denne ulikheten holder for $N \geqslant 1$. Det betyr at vi kun trenger å ta med to ledd. Altså er

$$L(0.5) \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\, 2^{4n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2^5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} \approx 0.497$$

med tre desimalers nøyaktighet.

6 Vi skal evaluere grensen

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)}$$

Observer at dette er et uttrykk på ubestemt form 0/0. Vi starter med å skrive om telleren ved å bruke taylorrekken til e^x om $x = 0$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

Denne gjelder for alle x, og telleren kan nå uttrykkes som

$$(e^x - 1 - x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2 = \frac{x^4}{4} + O(x^5).$$

I den siste likheten har vi brukt at det eneste leddet med polynomgrad mindre enn 5 som fremkommer ved å kvadrere uttrykket i parantesen er $\frac{x^4}{4}$. Alle andre ledd inngår i leddet $O(x^5)$.

For å forenkle nevneren, finner vi først taylorrekken til $\ln(1 + x^2)$ om $x = 0$. Vi vet at

$$\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n, \quad \text{for } -1 < y \leqslant 1.$$

Ved å la $y = x^2$ får vi at

$$\ln(1 + x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots .$$

Denne gjelder for $-1 < x^2 \leqslant 1$ eller ekvivalent for $-1 < x \leqslant 1$. Nevneren kan nå skrives som

$$x^2 - \ln(1 + x^2) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} - \cdots = \frac{x^4}{2} + O(x^6).$$

Vi er nå klare til å evaluere grensen,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + O(x^5)}{\frac{x^4}{2} + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x)}{2 + O(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

7 Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^2}{(1 + 2^n)(1 + n\sqrt{n})}.$$

Ved å skrive ut nevneren kan vi vise at

$$a_n = \frac{n^2}{1 + 2^n + n\sqrt{n} + n\sqrt{n}2^n} \leqslant \frac{n^2}{n\sqrt{n}2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} = b_n.$$

Det følger nå av sammenligningstesten at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer dersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gjør det. For å vise at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer kan vi bruke forholdstesten. Vi vet at $b_n > 0$ for alle n. Videre er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Det følger derfor av forholdstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer. Det betyr at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ også konvergerer.

$\boxed{8}$ Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(5-2x)^n}{n}$$

Legg først merke til at dersom vi velger $|5-2x| > 1$ divergerer rekken fordi a_n ikke konvergerer mot null. Området $|5-2x| > 1$ er ekvivalent med at $x < 2$ eller $x > 3$.

Vi sjekker så for absolutt konvergens ved å se på leddene

$$|a_n| = \frac{|5-2x|^n}{n}.$$

Vi kan vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|5-2x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|5-2x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} |5-2x| \frac{n}{n+1} = |5-2x|.$$

Det følger av forholdstesten at rekken er absolutt konvergent når $0 \leqslant |5-2x| < 1$ eller ekvivalent når $2 < x < 3$. Vi vet at absolutt konvergens impliserer konvergens. Derfor kan vi konkludere med at rekken er konvergent for alle $x \in (2,3)$.

Endepunktene $x = 2$ og $x = 3$ må vi sjekke spesielt. For $x = 2$ har vi at $a_n = \frac{1}{n}$. Denne rekken er som kjent divergent.

For $x = 3$ har vi at $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Rekken konvergerer ikke absolutt siden $|a_n| = \frac{1}{n}$. Derimot ser vi at dette er en alternerende rekke der

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} = |a_n|$$

og der $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Det følger av den alternerende rekke-testen at rekken konvergerer.

Oppsummert har vi at rekken er:

- Divergent for $x \leqslant 2$ eller $x > 3$.
- Absolutt konvergent for $x \in (2,3)$.
- Betinget konvergent for $x = 3$.

$\boxed{9}$ Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

La oss heller studere potensrekken

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

Vi ser at ved å sette $x = \pi$ får vi den opprinnelige rekken. Vi ønsker nå å kunne gjenkjenne denne rekken som en kjent taylorrekke om $x = 0$. Vi vet at taylorrekken til $\sin(x)$ om $x = 0$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Denne ligner til en viss grad på vår rekke. La oss starte med å gjøre et variabelskifte $m = n-1$, slik at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-2}}{(2m+1)!}$$

Nå er nevneren lik. La oss så bruke at $(-1)^{m+1} = (-1)(-1)^m$ og at $x^{2m-2} = x^{-3}x^{2m+1}$. Da har vi at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^m x^{-3} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = (-x^{-3}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Nå er også telleren i summen lik. Den eneste forskjellen er nå startpunktet for summen. Husk at generelt gjelder det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - b_0.$$

Det første leddet i summen vår er x, slik at

$$S(x) = (-x^{-3}) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} - x \right).$$

Vi kan nå sette inn for taylorrekken til $\sin(x)$ om $x = 0$. Det gir at

$$S(x) = (-x^{-3}) \left(\sin(x) - x\right) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Innsatt $x = \pi$ har vi at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!} = S(\pi) = \frac{\pi - \sin \pi}{\pi^3} = \frac{1}{\pi^2}.$$