Anbefalte oppgaver uke 44

Høsten 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Taylors formel av grad 6 for $f(x)$ rundt $x = a$ er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{f^4(a)}{24}(x-a)^4 + \frac{f^5(a)}{120}(x-a)^5 + \frac{f^6(a)}{720}(x-a)^6 + \frac{f^7(s)}{5140}(x-a)^7,$$

der s ligger mellom x og a. Siden

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

og $a = 1$, får vi

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + \frac{1}{7s^7}(x-1)^7,$$

der s ligger mellom 1 og x. Lagrange-resten er

$$E_6(x) = \frac{1}{7s^7}(x-1)^7.$$

$\boxed{2}$ Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ rundt punktet $x = a$ er gitt ved

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3.$$

Nå er $f(x) = \cos(x)$, og $a = \pi/4$, så vi får

$$P_3(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

$\boxed{3}$ Vi bruker taylorpolynom til å løse denne oppgaven. Taylorpolynomet til $\sin(x)$ om $x = 0$ er gitt som (side 281 i læreboken)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7).$$

Vi setter dette inn i grenseuttrykket og får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)\right)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + O(x^4)\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Denne oppgaven kan også løses ved hjelp av l'Hôpitals regel, men denne må da anvendes tre ganger.

$\boxed{4}$ Vi starter med å regne ut de tre første deriverte til $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Vi bruker så definisjonen av et andreordens taylorpolynom for f rundt $x = a$ (side 273 i læreboken), og regner ut $P_2(x)$ med $a = 64$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f''(64)}{2}(x-64)^2 \\ &= \sqrt{64} + \frac{1}{2}\cdot 64^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-64) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 64^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-64)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(x-64) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{152}(x-64)^2 \\ &= 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096}. \end{aligned}$$

Vi finner så en approksimasjon til $\sqrt{61}$ ved sette inn $x = 61$,

$$\sqrt{61} \approx P_2(61) = 8 - \frac{3}{16} - \frac{9}{4096} \approx 7.810\,302\,734.$$

Fra Taylors teorem (side 278 i læreboken), vet vi at feilen er gitt som ($n = 2$)

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3}(x-64)^3,$$

for en s mellom a og x. Vi ønsker å finne en øvre grense for feilen, det vil si at vi må finne den verdien av s som gjør $f'''(s)$ størst. Vi vet at $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ er synkende på intervallet $[61, 64]$, slik at

$$\max_{s\in[61,64]} f'''(s) = f'''(61) = \frac{3}{8}61^{-\frac{5}{2}}.$$

Dette betyr at vi kan finne en øvre grense på feilen,

$$|E_2(x)| \leqslant \left|\frac{f'''(61)}{6}(x-64)^3\right| = \frac{f'''(61)}{6}|x-64|^3.$$

For $x = 61$ får vi at

$$|E_2(61)| \leqslant \frac{3}{8\cdot 6}61^{-\frac{5}{2}}|61-64|^3 \approx 0.000\,058\,066.$$

Det minste intervallet som vi med sikkerhet kan si inneholder $\sqrt{61}$ er derfor

$$(P_2(61) - 0.000\,058\,066, P_2(61) + 0.000\,058\,066) = (7.810\,244\,668, 7.810\,360\,800).$$

Fra kalkulatoren vet vi at

$$\sqrt{61} \approx 7.810\,249\,676$$

med ni desimalers nøyaktighet. Vi ser at dette er innenfor intervallet.

$\boxed{5}$ Dette er en geometrisk rekke med $k = 1/e$. Siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k},$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n = k \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k},$$

får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}.$$

$\boxed{6}$ La oss starte med å skrive om rekken til en sum av to rekker,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}.$$

Dette minner om noe som ligner på geometriske rekker. For en geometrisk rekke (sidene 509–511 i boka) har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

når $|r| < 1$. Observer at ved å endre summasjonsgrensene kan vi skrive denne regelen på ekvivalent form

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}.$$

Vi ønsker nå å skrive om de to rekkene på denne formen. Vi starter med den første,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

På tilsvarende vis får vi for den andre summen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Den totale summen får vi så ved å legge sammen de to bidragene,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$\boxed{7}$ I denne oppgaven bruker vi integraltesten (Teorem 8 side 515 i læreboka). Observér at

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$$

er positiv, kontinuerlig og synkende på $[10, \infty)$. Videre er

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}, \qquad \text{for alle } x \in [10, \infty),$$

og $\int_{10}^{\infty} x^{-(3/2)}\, dx < \infty$ (se Teorem 2 side 367 i læreboka). Dermed er $\int_{10}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$ og rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ konvergerer ved integraltesten.

$\boxed{8}$ Vi skal avgjøre om rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^3}$$

konvergerer eller divergerer. Her er det nyttig å huske at logaritmer vokser saktere enn alle potenser, det vil si at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \quad \text{for alle } a > 0,$$

som oppgitt i Teorem 5 på side 185 i boka. La $a = 1/3$, da har vi at

$$\frac{1}{(\ln(x))^3} \geqslant \frac{1}{x}, \qquad \text{for alle } x \geqslant 200.$$

Observér så at

$$f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3}$$

er positiv, kontinuerlig og synkende på $[200, \infty)$, men $\int_{200}^{\infty} f(x)\,dx = \infty$ siden $\int_{200}^{\infty} x^{-1}\,dx = \infty$ (se Teorem 2 side 367 i læreboka). Vi bruker derfor integraltesten (Teorem 8 side 515 i læreboka), for å konkludere med at den aktuelle rekka divergerer.

$\boxed{9}$ Oppgave 6 iii) på eksamen høst 2021