TMA4100 Matematikk 1

Anbefalte oppgaver uke 35

Høsten 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)** Vi deler på n^3 over og under brøkstreken og får

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1 + 5n^3}{6 - 7n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n - 1/n^3 + 5}{6/n^3 - 7} = \frac{0 - 0 + 5}{0 - 7} = -\frac{5}{7}.$$

b) Vi ganger med $\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}$ over og under brøkstreken og får

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n} - n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right) \\
&= \sqrt{1+0} + 1 = 2.
\end{aligned}$$

c) Ettersom $|\sin(n)| \leqslant 1$ for alle n har vi at

$$-\frac{2}{n} \leqslant \frac{2\sin(n)}{n} \leqslant \frac{2}{n}$$

for alle $n \geqslant 1$. Og da

$$\lim_{n\to\infty} \pm\frac{2}{n} = 0$$

gir den såkalte skviseregelen (se oppgave 4 i denne ukens interaktive forelesning) at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(n)}{n} = 0.$$

$\boxed{2}$ Legg merke til at

$$a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_2 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6}{5} = \frac{49}{20} = 2.45 \quad \text{og} \quad a_3 = \frac{\left(\frac{49}{20}\right)^2 + 6}{5} = \frac{4801}{2000} = 2.4005.$$

Det kan dermed virke som om følgen er avtagende. Vi viser så at dette faktisk er tilfellet ved induksjon.

Fra observasjonen over ser vi at

$$a_2 = \frac{49}{20} = 2.45 < 2.5 = \frac{5}{2} = a_1.$$

Anta så at $a_{n+1} < a_n$. Vi ønsker å vise at $a_{n+2} < a_{n+1}$. Vi ser at

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 6}{5} < \frac{a_n^2 + 6}{5} = a_{n+1}.$$

Altså har vi vist at følgen er avtagende ved induksjon.

For å vise konvergens holder det nå å vise at følgen også er nedad begrenset. La oss først anta at vi har vist at følgen er nedad begrenset (og dermed konvergent). La så

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Det gir at

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 6}{5} = \frac{L^2 + 6}{5},$$

det vil si, $L^2 - 5L + 6 = 0$, som har løsning $L = 2$ og $L = 3$. Vi har alt slått fast at følgen er avtagende og der

$$a_1 = \frac{5}{2} = 2.5 < 3.$$

Altså må følgen (gitt at den er nedad begrenset) konvergere mot 2.

Vi viser så at følgen er nedad begrenset av 2 ved induksjon. Ettersom $a_1 = 5/2$ vet vi at $a_1 > 2$. Anta så at $a_n > 2$. Vi ønsker å vise at $a_{n+1} > 2$. Vi ser at

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} > \frac{2^2 + 6}{5} = 2.$$

Altså har vi vist at følgen er nedad begrenset av 2 ved induksjon.

Dermed har vi vist at følgen er konvergent og at den konvergerer mot 2.

$\boxed{3}$ **a)** La $\epsilon = 1$. Fra oppgaveteksten vet vi at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Altså må det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon = 1$$

for alle $n > N$.
La så

$$M = \max\{1, |a_1|, \ldots, |a_N|\}.$$

Da er $|a_n| \leqslant M$ for alle $n \geqslant 1$. Altså er følgen begrenset som vi skulle vise.

b) Et eksempel på en følge som er begrenset, men som ikke konvergerer er følgen $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\boxed{4}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2020h.pdf`