

Interaktiv forelesning uke 43

Høsten 2023

- 1 En smittsom sykdom bryter ut i en befolkning på $N = 2000$ individer. Sykdommen er slik at smittede kan bli friske, men ikke immune.

Vi har tidligere sett at en rimelig modell for utviklingen i smitten er gitt ved

$$\frac{dI}{dt} = f(I(t)), \quad \text{der} \quad f(I) = kI(N - I) - bI,$$

hvor

- $I(t)$ er antall smittede ved tiden t ,
- k måler smittsomheten, og
- b måler bedringsraten.

Tilfeller der smitten holder seg stabil svarer til nullpunkter for funksjonen f . Det er klart at $I = 0$ alltid er en slik løsning, men avhengig av parameterne kan det være flere.

- a) Vi tenker først at $k = a$ og b begge er konstanter. Da ser vi at

$$I = N - \frac{b}{a}$$

er en annen konstantløsning, så lenge uttrykket er positivt.

La nå $a = 0.001$ og $b = 0.2$. Bruk Newtons metode med startverdi $I_0 = 1200$, og gjør tre iterasjoner. Sammenlign I_3 med den teoretiske konstantløsningen. Hvor stor er feilen?

- b) Anta så at det innføres smitteverntiltak i takt med smitten, slik at k ikke lenger holder seg konstant. Nærmere bestemt er nå

$$k(I) = a \cos\left(\frac{I}{M}\right), \quad \text{der} \quad M = \frac{4200}{\pi}.$$

Benytt Newtons metode for å undersøke hvordan dette påvirker konstantløsningen.

- 2 La $f(x)$ være slik at den er kontinuerlig på $[-1, 1]$, og har kontinuerlig andrederivert på $(-1, 1)$. Anta videre at både $f'(x)$ og $f''(x)$ er positive på $(-1, 1)$, og at $f(-1) < 0 < f(1)$.

Vis at f har nøyaktig ett nullpunkt r på $(-1, 1)$, og at Newtons metode konvergerer mot r dersom man benytter startverdi $x_0 \in (r, 1)$.

- 3 Finn fire tilnærmede verdier av integralet

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^3 - x + 1} dx$$

ved å bruke Simpsons metode med henholdsvis 2, 4, 6 og 8 delintervaller.

- 4 (Teorem 6.4) Vis at dersom $f(x)$ har kontinuerlig andrederivert, og $|f''(x)| \leq K$ for alle $x \in [a, b]$, så er

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2},$$

hvor M_n er verdien fra midtpunktmetoden med n delintervaller.

(Vink: Benytt teorem 11 i kapittel 4.9, for feilestimat ved lineær approksimasjon.)