TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 35

Høsten 2023

$\boxed{1}$ Finn minste øvre skranke og største nedre skranke for mengden:

a) $\left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \geqslant 1 \right\}$

b) $\{x \mid |x-4| < 7\}$

Er de minste øvre skrankene og de største nedre skrankene en del av mengden?

$\boxed{2}$ Vi skal her vise at $\sqrt{2}$ *ikke* er et rasjonalt tall, dvs at det *ikke* finnes heltall p og q (der $q \neq 0$) slik at

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

Vi bruker teknikken med *motsigelsesbevis*. Dvs. anta at det faktisk finnes slike heltall p og q (der $q \neq 0$) og der p og q ikke har noen felles faktorer. Hvorfor er ikke det med ingen felles faktorer en restriksjon? Da må $p^2 = 2q^2$. Hva kan du da si om p og q, og hvorfor er dette i motstrid med antakelsen?

$\boxed{3}$ Fra Oppgave 2 vet vi da at ligningen $x^2 - 2 = 0$ *ikke* har en løsning $x_0 \in \mathbb{Q}$. Finn $a, b \in \mathbb{Q}$ slik at

$$a < x_0 < b.$$

Forklar at $x^2 - 2 = 0$ og $x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ har samme løsningsmengde for $x > 0$. Sett $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x_1 = a$, og definer $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n \in \{1, 2, \dots\}$. Hva ser følgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ut til å konvergere mot? Kan du lage en enkel kode som finner elementene i følgen?

$\boxed{4}$ La følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved

$$a_1 = 3 \qquad \text{og} \qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}.$$

Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$