TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 34

Høsten 2023

Denne uken ser vi på hvordan vi kan bruke matematikk til å lage modeller for ulike tilfeller av smittespredning i en befolkning.

Eksempel 1

Denne modellen er et forsøk på å beskrive utviklingen av en smittsom, uhelbredelig, men ikke-dødelig sykdom i en befolkning på 2000 personer som alle befinner seg innenfor et begrenset område. Som et eksempel kan vi tenke oss at befolkningen er studenter ved NTNU og at alle studentene oppholder seg på eller i umiddelbar nærhet av campus. Sykdommen bryter ut ved tid $t = 0$, der tiden er målt i dager. Vi antar at befolkningen er godt blandet. Det vil si at alle i befolkningen er i kontakt med samme brøkdel av befolkningen fra begge kategorier (altså infiserte og ikke-infiserte).

Smitte overføres ved nær kontakt mellom en infisert og en ikke-infisert person. Dette kan uttrykkes matematisk ved at antall nye personer som blir infisert per dag (endringsraten for antall infiserte) er proporsjonal med produktet av antall infiserte personer og antall personer som ikke er infiserte. (Hvorfor dette er rimelig skal vi diskutere og begrunne senere.)

La $I(t)$ betegne antall infiserte personer ved tidspunkt t. Endringsraten for antall infiserte kan da beskrives ved

$$\frac{dI}{dt} = kI(2000 - I),$$

der k er en positiv konstant.

$\boxed{1}$ Hva uttrykker produktet $I(2000 - I)$? Hvorfor er da en rimelig antagelse at endringsraten er proporsjonal med $I(2000 - I)$ ut fra det vi vet om smittespredningen?

$\boxed{2}$ Hvilke faktorer kan det være som påvirker verdien av konstanten k?

$\boxed{3}$ Hva kan du si om veksten i antall infiserte personer når over halvparten av befolkningen er infisert? Når er endringsraten på sitt største? Og hva skjer med endringsraten etter hvert som tiden går?

$\boxed{4}$ La $I(0) = 1$ og $k = 0.005$.

Vis at funksjonen

$$I(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-10t}}$$

er en løsning av vekstligningen

$$\frac{dI}{dt} = 0.005I(2000 - I)$$

og også tilfredsstiller kravet $I(0) = 1$.

Bruk gjerne GeoGebra eller annen programvare til å tegne grafen til denne funksjonen. Sammenlign det du ser av grafen med det du har kommet fram til i punktene ovenfor.

Finnes det andre løsninger av vekstligningen?

Eksempel 2

I dette eksempelet ser vi på en situasjon som tar høyde for at personer som er blitt infiserte også kan bli friske igjen. Vi regner ikke med immunitet, slik at en person som har blitt frisk kan godt bli infisert igjen. Vi tenker fortsatt på en populasjon bestående av 2000 personer innenfor et begrenset område, som i Eksempel 1. Da vil disse personene fortsatt kunne deles i to kategorier:

- Infiserte: de som kan spre sykdommen, $I(t)$.
- Smittbare: de som kan få sykdommen, $S(t) = 2000 - I(t)$.

Spørsmålet nå er hvordan det at folk kan bli friske, vil påvirke spredningsraten. La T betegne antall dager en smittet person i gjennomsnitt forblir smittsom (infeksjonstiden). Vi innfører tallet

$$b = \frac{1}{T}$$

som vi kan kalle den daglige bedringsraten. Parameteren b bestemmer da hvor fort personer blir friske og dermed kan bli utsatte for ny spredning. Ettersom b er bedringsraten så vil antallet personer som bytter kategori fra infisert til smittbar per tidsenhet være bI.

$\boxed{5}$ Forklar hvorfor spredningsraten nå kan beskrives ved modellen

$$\frac{dI}{dt} = kI(2000 - I) - bI.$$

a) Hva representerer leddet $-bI$?

b) Vi har ennå ikke tatt i betraktning at noen kan bli immune. Hvis det skjer, hvilken innvirkning vil det ha på modellen?