TMA4100 Matematikk 1

Skriftlig innlevering 2

Høsten 2023

Innleveringsfrist: 13. oktober, kl. 16.00

$\boxed{1}$ **a)** Vis at

$$e^x > 1 + x \qquad \text{for } x > 0.$$

b) Bruk så deloppgave a) og et induksjonsbevis til å vise at

$$e^x > \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{for } x > 0 \text{ og } N \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{2}$ I denne oppgaven ser vi på en funksjon $f(x)$ som oppgis å være kontinuerlig og deriverbar. Vi får også oppgitt at

- funksjonen er odde, det vil si $f(-x) = -f(x)$,
- funksjonen er periodisk med periode 2π, det vil si $f(x+2\pi) = f(x)$,
- $f(x) \geqslant 0$ for $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
- $f(\pi/2) = 1$,
- $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2$.

Regn så ut:

a) $\displaystyle\int_{7\pi}^{9\pi} |f(x)|\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{f(3x)} f'(3x)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{(f(x))^2} \sin(f(x))\,dx.$

$\boxed{3}$ Bruk en riemannsum til å finne grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2+i^2}.$$

$\boxed{4}$ Sandra har fått i oppgave på eksamen å regne ut den deriverte til

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

i $x = 0$, altså $g'(0)$. Hun ser med en gang at for $x \neq 0$ får hun

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Hun konkluderer så med at siden $\lim_{x\to 0} g'(x)$ ikke eksisterer, vil ikke $g'(0)$ eksistere heller.

Rett før hun skal levere eksamensbesvarelsen sin ser hun at hun har gjort en feil.

Klarer du å se hvorfor Sandras argument er feil? Husk å begrunne hva du mener er feil i Sandras besvarelse og skriv ned hva du mener vil være en riktig konklusjon.

(Vink: Hva er forskjellen mellom utsagnene *den deriverte eksisterer* og *den deriverte er kontinuerlig*?)