Velkommen til oversiktsforelesninger i Matematikk 1

med

Jørgen Endal

Repetisjon

Skivemetoden, sylinderskallmetoden

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx, \qquad \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Buelengde

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Overflateareal

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Vi fortsetter med: Numerikk (kap. 4.2, 4.9 og 6.6–6.7)

Forelesning uke 43

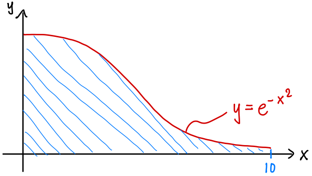
Nøkkelbegrep:

- Lineær approksimasjon med feilestimat
- Newtons metode
- Trapesmetoden
- Simpsons metode

Introduksjon

I uke 41 så vi på e^{-x^2} som er en kontinuerlig funksjon for $x \in [0, 10]$, og som dermed kan integreres:

$$\int_0^{10} e^{-x^2} dx$$



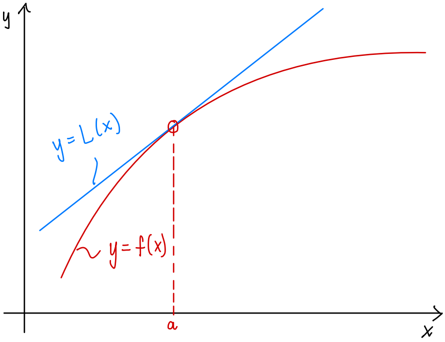
Men det finnes ingen elementær funksjon F slik at

$$\int_0^{10} e^{-x^2} dx = F(10) - F(0).$$

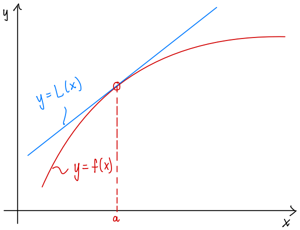
Denne uka skal vi finne en tilnærmet verdi til integralet over!

◇ Lineær approksimasjon (kap. 4.9)

Idé: Rette linjer approksimerer generelle funksjoner.



◇ Lineær approksimasjon (kap. 4.9)



Definisjon 4.8 (Linearisering)

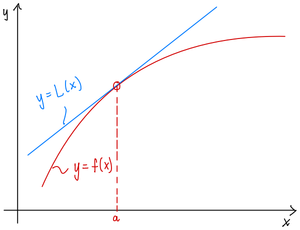
Lineariseringen til funksjonen f om punktet $x = a$ er en funksjon L definert ved

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Vi sier at $f(x) \approx L(x)$ gir en *lineær approksimasjon* av f for x nærme $x = a$.

Merk: L er *tangenten* til f i punktet $x = a$.

◇ Lineær approksimasjon (kap. 4.9)



Definisjon 4.8 (Linearisering)

Lineariseringen til funksjonen f om punktet $x = a$ er en funksjon L definert ved

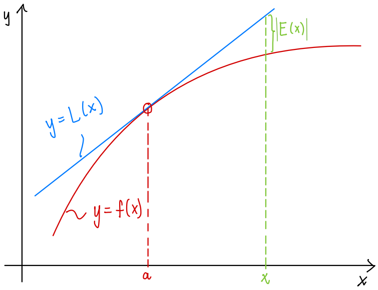
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Vi sier at $f(x) \approx L(x)$ gir en *lineær approksimasjon* av f for x nærme $x = a$.

Eksempel

Finn en tilnærmet verdi av $\sqrt{24}$.

◇ Lineær approksimasjon (kap. 4.9)



Teorem 2.11 (Sekantsetningen)

Anta at f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b). Da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

◇ Lineær approksimasjon (kap. 4.9)

Teorem 4.11 (Feilestimat for lineær approksimasjon)

Dersom f har en kontinuerlig andrederivert på $[a, x]$ og $|f''(t)| \leq K$ for $t \in [a, x]$, vil *feilen* definert ved

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

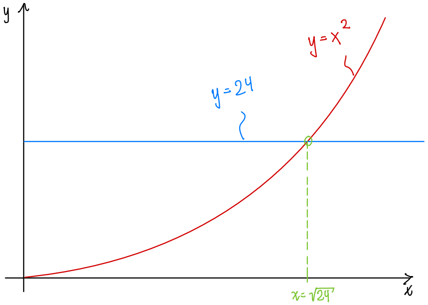
tilfredsstille

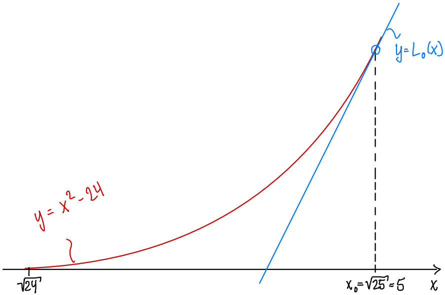
$$E(x) \leq \frac{K}{2}(x - a)^2.$$

Eksempel

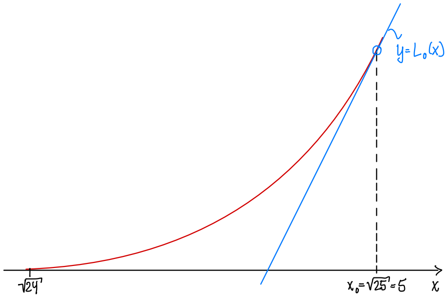
Estimer feilen ved lineær approksimasjon av $\sqrt{24}$.

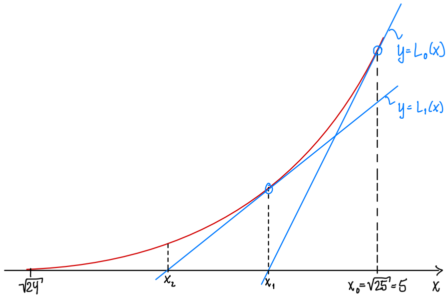
◇ Newtons metode (kap. 4.2)





◇ Newtons metode (kap. 4.2)





◇ Newtons metode (kap. 4.2)

Newtons metode

Vi kan finne x slik at $f(x) = 0$ ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{hvor } x_0 \text{ er gitt.}$$

Eksempel (Jupyter notebook)

Finn en tilnærment verdi av $\sqrt{24}$.

◇ Newtons metode (kap. 4.2)

Eksempel (Jupyter notebook)

Finn en tilnærment verdi av $\sqrt{24}$.

Merk: Kalkulatoren gir $4,898979$.

Merk: Vi trenger en god gjetning x_0 for å starte Newtons metode slik at $f'(x_0) \neq 0$.

Merk: Newtons metode er ei følge definert ved

$$\left\{x_0, x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \dots, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \dots\right\}.$$

Husk også at ei monoton, begrenset følge konvergerer. Se plenumsregning.

Numerisk integrasjon (kap. 6.6-6.7)

Vi skal bestemme

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

numerisk.

Vi deler opp $[a, b]$ i n like store delintervaller med steglengde $h = (b - a)/n$ og

$$x_j = a + jh, \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

<u>Idé:</u> Bruk en approksimasjon p av f slik at:

(i) $f(x) \approx p(x)$ for $x \in [x_{i-1}, x_i]$ der $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx$ kan regnes ut eksakt.

Vi skal se på 3 metoder:

- p er et polynom av grad 0, midtpunktmetoden.
- p er et polynom av grad 1, trapesmetoden.
- p er et polynom av grad 2, Simpsons metode.

Numerisk integrasjon (kap. 6.6-6.7)

Vi skal bestemme

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

numerisk.

<u>Idé:</u> Bruk en approksimasjon p av f slik at:

(i) $f(x) \approx p(x)$ for $x \in [x_{i-1}, x_i]$ der $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx$ kan regnes ut eksakt.

Vi skal se på 3 metoder:

- p er et polynom av grad 0, midtpunktmetoden.
- p er et polynom av grad 1, trapesmetoden.
- p er et polynom av grad 2, Simpsons metode.

Eksempel (Jupyter notebook)

Bruk Simpsons metode til å finne en tilnærming av $\int_0^{10} e^{-x^2} dx$.

Numerisk integrasjon (kap. 6.6-6.7)

Teorem 6.4 (Feilestimat for midtpunkt- og trapesmetoden)

La $h = (b-a)/n$. Dersom f har en kontinuerlig 2.-derivert på $[a,b]$ og $|f''(x)| \leq K$ for $x \in [a,b]$, vil

$$\left| \int_a^b f(x)dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{24} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2},$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}.$$

Teorem 6.5 (Feilestimat for Simpsons metode)

La $h = (b-a)/(2n)$. Dersom f har en kontinuerlig 4.-derivert på $[a,b]$ og $|f^{(4)}(x)| \leq K$ for $x \in [a,b]$, vil

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_{2n} \right| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180(2n)^4}.$$