Anbefalte oppgaver uke 43

Høsten 2022

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi setter $f(x) = x^2 - 3$. Da blir $f'(x) = 2x$, og iterasjonen blir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}.$$

Vi gjetter på at $\sqrt{3}$ er cirka lik $x_0 = 1.7$. Bruk av iterasjonen over, gir tabellen:

x_0	1.7
x_1	1.7323529411764707
x_2	1.7320508339159093
x_3	1.7320508075688774
x_4	1.7320508075688772
x_5	1.7320508075688774
x_6	1.7320508075688772

Det ser ut som om iterasjonene har stabilisert seg, og $\sqrt{3} \approx 1.732050807568877$.

$\boxed{2}$ Først finner vi ut hvor mange løsninger som finnes. Observer at både $\cos x$ og x^2 er like funksjoner. Det betyr at dersom x_1 er en løsning, det vil si at $\cos x_1 = x_1^2$, så er også $-x_1$ en løsning.

Videre vet vi at $x^2 > 1$ når $|x| > 1$, og at $\cos x \leqslant 1$ for alle x. Altså må alle løsninger ligge i intervallet $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

La

$$f(x) = \cos x - x^2.$$

Vi ønsker å bestemme alle x slik at $f(x) = 0$. Vi har at

$$f'(x) = -\sin x - 2x.$$

Det vil si at $f'(x) < 0$ for $x \in (0, 1]$, slik at $f(x)$ er synkende her. Altså kan det bare være en løsning på dette intervallet siden f er kontinuerlig. Endepunktet på intervallet, $x = 0$, er åpenbart ikke riktig løsning.

Vi konkluderer analysen vår med at det finnes akkurat to løsninger, en i intervallet $(0, 1]$ og en i intervallet $[-1, 0)$.

Vi bruker så Newtons metode (side 225 i boka) til å bestemme roten i intervallet $(0, 1]$. I vårt eksempel får vi at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n^2}{-\sin x_n - 2x_n} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n^2}{\sin x_n + 2x_n}.$$

Som startpunkt bruker vi $x_0 = 0.5$. Vi utfører første iterasjon, og får

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - x_0^2}{\sin x_0 + 2x_0} = 0.5 + \frac{\cos 0.5 - 0.5^2}{\sin 0.5 + 2 \cdot 0.5} \approx 0.924206927293198 \approx 0.924.$$

Ved å iterere videre får vi følgende resultat:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.500000000000000	$6.28 \cdot 10^{-01}$
1	0.924206927293198	$-2.52 \cdot 10^{-01}$
2	0.829105755997418	$-1.19 \cdot 10^{-02}$
3	0.824146131728195	$-3.29 \cdot 10^{-05}$
4	0.824132312409912	$-2.56 \cdot 10^{-10}$
5	0.824132312302522	$1.11 \cdot 10^{-16}$
6	0.824132312302522	$1.11 \cdot 10^{-16}$

Vi ser at de to løsningene er $x \approx \pm 0.824132312302522$.

$\boxed{3}$ Vi skal finne maksimum og minimum for funksjonen

$$g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Siden $\sin x$ er en oscillerende funksjon mellom -1 og 1, så vi kan forvente mange lokale maksimum og minimum for $g(x)$. Nevneren $1+x^2$ monotont økende, slik at det globale maksimumspunktet må være det lokale maksimumet som ligger nærmest origo, og tilsvarende for det globale minimumspunktet.

For å finne kandidater til maksimum og minimum, regner vi først ut den deriverte,

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)\cos x - \sin x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser at $g'(x) = 0$ når telleren er null. Vi ønsker altså å finne røtter til funksjonen

$$f(x) = (1+x^2)\cos x - 2x \sin x.$$

For å løse $f(x) = 0$ bruker vi Newtons metode,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Den deriverte til $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos x + (1+x^2)(-\sin x) - (2\sin x + 2x\cos x) \\ &= -(1+x^2)\sin x - 2\sin x = -(3+x^2)\sin x. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte som i forrige oppgave itererer vi oss frem til løsningen. Merk at vi ikke kan velge $x_0 = 0$, siden $f'(0) = 0$. Vi velger derfor $x_0 = 1.0$ i første omgang (husk at vi vet at globalt maksimum og minimum ligger nært null).

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.0000000000000000	$-6.02 \cdot 10^{-01}$
1	0.8210463079671654	$-6.09 \cdot 10^{-02}$
2	0.7983816444825249	$-9.50 \cdot 10^{-04}$
3	0.7980170858066054	$-2.45 \cdot 10^{-07}$
4	0.7980169918423763	$-1.60 \cdot 10^{-14}$
5	0.7980169918423702	$-2.22 \cdot 10^{-16}$

Deretter prøver vi $x_0 = -1.0$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	-1.0000000000000000	$-6.02 \cdot 10^{-01}$
1	-0.8210463079671654	$-6.09 \cdot 10^{-02}$
2	-0.7983816444825249	$-9.50 \cdot 10^{-04}$
3	-0.7980170858066054	$-2.45 \cdot 10^{-07}$
4	-0.7980169918423763	$-1.60 \cdot 10^{-14}$
5	-0.7980169918423702	$-2.22 \cdot 10^{-16}$

Vi evaluerer så g i disse to punktene:

$$g(0.7980169918423702) \approx 0.437,$$
$$g(-0.7980169918423702) \approx -0.437.$$

Vi konkluderer med at maksimum til g er tilnærmet lik 0.437 og minimum er tilnærmet lik -0.437.

Det at minimumspunktet er lik minus maksimumspunktet er ikke tilfeldig. Dette følger av at at $\sin x$ og $1 + x^2$ er henholdsvis odde og like funksjoner, slik at også $g(x)$ er odde.

$\boxed{4}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2016h.pdf`

$\boxed{5}$ Me vil finna den faktiske feilen ved å bruka trapesmetoden med eitt delintervall for å tilnærma $\int_0^1 x^2\,dx$. Den eksakte verdien av dette integralet er $1/3$, medan

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[0^2 + 1^2\right] = \frac{1}{2}.$$

Dermed vert feilen

$$\left|\int_0^1 x^2\,dx - T_1\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}.$$

Frå feilestimatet på side 376 i boka (Teorem 4), har ein

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2},$$

der $f''(x) \leqslant K$ på $[a, b]$. Sidan $(x^2)'' = 2$ har ein ved innsetjing i estimatet ovanfor at

$$\left|\int_0^1 x^2\,dx - T_1\right| \leqslant \frac{2(1-0)^3}{12(1)^2} = \frac{1}{6}.$$

Dermed har me for dette integralet at feilestimatet er likt den faktiske feilen, som viser at ein ikkje kan forbetra konstanten 12 i estimatet. Det vil seia at denne ikkje kunne vore større, for då hadde feilestimatet vore mindre enn den faktiske feilen.

$\boxed{6}$ Me vil finna den faktiske feilen ved å bruka Simpsons metode med to delintervall for å tilnærma $\int_0^1 x^4\,dx$. Den eksakte verdien av dette integralet er $1/5$, medan

$$S_2 = \frac{1}{6}\left[0^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1^4\right] = \frac{5}{24}.$$

Dermed vert feilen

$$\left|\int_0^1 x^4\,dx - T_1\right| = \left|\frac{1}{5} - \frac{5}{24}\right| = \frac{1}{120}.$$

Frå feilestimatet på side 381 i læreboka (Teorem 5), har ein

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4},$$

der $f^{(4)}(x) \leqslant K$ på $[a,b]$. Sidan $(x^4)^{(4)} = 24$ har ein ved innsetjing i estimatet ovanfor at

$$\left|\int_0^1 x^4\,dx - S_2\right| \leqslant \frac{24(1-0)^5}{180(2)^4} = \frac{1}{120}.$$

Dermed har me for dette integralet at feilestimatet er likt den faktiske feilen, som viser at ein ikkje kan forbetra konstanten 180 i estimatet. Det vil seia at denne ikkje kunne vore større, for då hadde feilestimatet vore mindre enn den faktiske feilen.

$\boxed{7}$ Vi evaluerer først integralet eksakt,

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Vi anvender så Simpsons metode (side 378 i boka) med $n = 2$ på intervallet $[0,1]$. Det vil si at $h = 1/2$ og $y_i = x_i^3$, for $i = 0,1,2$, der $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ og $x_2 = 1$. Vi har da at

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{h}{3}(x_0^3 + 4x_1^3 + x_2^3) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vi har altså vist at $\int_0^1 x^3\,dx = S_2$.

$\boxed{8}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2017h.pdf`