TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 42

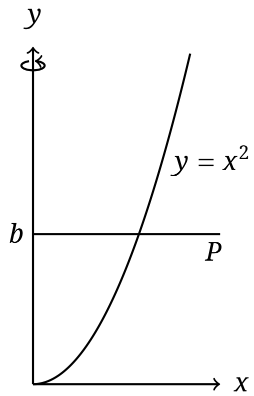
Høsten 2022

$\boxed{1}$ La

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

for $1/4 \leqslant x \leqslant 1/2$. Finn volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere grafen til $y = f(x)$ om x-aksen.

$\boxed{2}$ Ved rotasjon av parabelen $y = x^2$ om y-aksen fremkommer en rotasjonsparaboloide (se figur nedenfor).

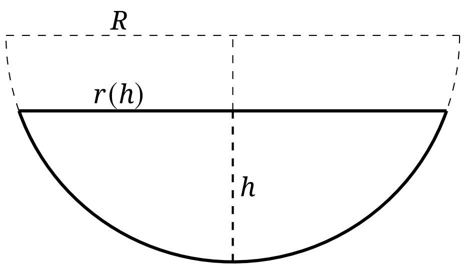


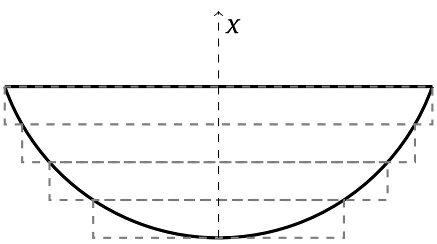
Rotasjonsparaboloiden som ligger under P har areal $7\pi/6$.

Bestem punktet $(0, b)$ der P skjærer y-aksen.

$\boxed{3}$ En halvkuleformet skål med kuleradius R er fylt med vann sånn at vannstanden målt fra bunnen av er h. La $r = r(h)$ betegne radiusen til vannoverflaten som funksjon av h.

Volumet av vannet kan tilnærmes ved hjelp av sylindriske skiver, og dette kan betraktes som en riemannsum. Del intervallet $[0, h]$ inn i n delintervaller med lengde h/n, slik at høyre endepunkt for intervall nummer i er $x_i = ih/n$. Da kan vannvolumet tilnærmes med volumet av n skiver med tykkelse h/n og radius $r(x_i)$, se figuren under.





Finn en sum som uttrykker det samlede volumet av disse n skivene. Når $n \to \infty$ vil denne summen korrespondere til et integral på formen

$$\int_0^h f(x)\, dx.$$

Finn dette integralet, og bruk det til å vise at volumet V av vannet uttrykt ved R og h er

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

$\boxed{4}$ La funksjonen F være definert for $x \geqslant 1$ ved

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt,$$

og la K være kurven $y = F(x)$ for $1 \leqslant x \leqslant 2$. Finn buelengden av K.