TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 41

Høsten 2022

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ **a)** Argumenter for at det uegentlige integralet

$$f(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$

konvergerer for alle $x > -1$.
Hint: Se på $(0,1]$ og $[1,\infty)$ separat. Du kan benytte at[1]

$$e^t \geqslant \frac{t^n}{n!}$$

for alle $t \geqslant 0$ og heltall $n \geqslant 0$.

b) Bruk delvis integrasjon til å vise at identiten

$$f(x) = xf(x-1)$$

holder for alle $x > 0$.

c) Hva blir $f(n)$ for heltallige $n \geqslant 0$?

Bonusinfo

Her er $f(x) = \Gamma(x+1)$, der Γ er den såkalte gammafunksjonen[2]. Dette er enda et eksempel på en nyttig funksjon som ikke kan skrives ned ved hjelp av elementærfunksjoner.

Denne funksjonen finner man igjen mange plasser. For eksempel er volumet til en n-dimensjonal enhetskule gitt ved

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},$$

som for øvrig medfører at $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Du synes kanskje det er overraskende at π dukker opp her?

Om du noen gang har hørt om den berømte Riemann-hypotesen for Riemanns ζ, kan det også nevnes at det er en sammenheng mellom denne og Γ: En har at

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

for alle s hvor dette gir mening (uten at vi skal gå nærmere inn på dette.) Denne likningen viser at man har en form for symmetri rundt $s = 1/2$, og det er dette som gir opphav til formodningen.

[1] Dette er ikke vanskelig å vise ved hjelp av sekantsetningen og induksjon.
[2] Av historiske grunner er denne “forskjøvet” med 1.