Interaktiv forelesning uke 40

Høsten 2022

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{3}$ Vi husker at $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles *konveks* dersom

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \tag{1}$$

for alle $t \in [0,1]$ og $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. I resten av oppgaven kommer φ til å være en kontinuerlig[1] konveks funksjon.

Jensens ulikhet generaliserer (1) til flere punkter:

Teorem. *Anta at $n \geqslant 1$, og at $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Da er*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(x_i) \tag{2}$$

for alle $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ som er slik at $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

a) Bevis følgende integralversjon av Jensens ulikhet:

Teorem. *Anta at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en integrerbar funksjon. Da er*

$$\varphi\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \leqslant \int_a^b \varphi(f(x))g(x)\,dx$$

for enhver ikke-negativ, integrerbar $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ som er slik at $\int_a^b g(x)\,dx = 1$.

Hint: Benytt (2) på riemannsummer.

La $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ være en partisjon av $[a,b]$, med seleksjonspunkter $S = \{s_i\}_{i=1}^{n}$. Vi kan anta at $\|P\|$ er liten nok til at $R(g,P,S) > 0$, siden $\int_a^b g(x)\,dx = 1$. Da finner vi

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{R(fg,P,S)}{R(g,P,S)}\right) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} f(s_i)\frac{g(s_i)\Delta x_i}{R(g,P,S)}\right)\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \varphi(f(s_i))\frac{g(s_i)\Delta x_i}{R(g,P,S)} = \frac{R((\varphi\circ f)g,P,S)}{R(g,P,S)}\end{aligned}$$

ved å bruke (2). Lar vi nå $\|P\| \to 0$ i ulikheten finner vi det vi vil vise, siden

$$R(fg,P,S) \to \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \qquad R((\varphi\circ f)g,P,S) \to \int_a^b \varphi(f(x))g(x)\,dx,$$
$$R(g,P,S) \to \int_a^b g(x)\,dx = 1,$$

når $\|P\| \to 0$, og φ er kontinuerlig.

[1] Kontinuiteten kommer faktisk gratis for en konveks funksjon definert på et åpent intervall.

b) Bruk Jensens ulikhet til å vise at

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqslant xe^{-x^2/3}$$

for alle $x \geqslant 0$

Hint: Funksjonen gitt ved $\varphi(x) \coloneqq e^{-x}$ er konveks.

> Dette er klart sant for $x = 0$, så la oss anta at $x > 0$. Velger vi $\varphi(t) \coloneqq e^{-t}$, $f(t) \coloneqq t^2$ og $g(t) = x^{-1}$ (konstant) har vi
>
> $$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}\,dt &= x\int_0^x \varphi(f(t))g(t)\,dt \\ &\geqslant x\varphi\left(\int_0^x f(t)g(t)\,dt\right) \\ &= x\varphi\left(\frac{x^2}{3}\right) = xe^{-x^2/3}\end{aligned}$$
>
> fra Jensens ulikhet for integraler.

Bonusinfo

Bevis av (2). Dette er rett frem med induksjon på n. Basistilfellet er trivielt. Anta derfor at (2) alltid holder når $n \leqslant k-1$. Gitt $\{x_i\}_{i=1}^k$ og $\{t_i\}_{i=1}^k$ kan vi bytte indekseringen slik at $t_k < 1$. Nå er

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^k t_i x_i\right) = \varphi\left((1-t_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{t_i}{1-t_k}x_i + t_k x_k\right) &\leqslant (1-t_k)\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{t_i}{1-t_k}x_i\right) + t_k\varphi(x_k) \\ &\leqslant (1-t_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{t_i}{1-t_k}\varphi(x_i) + t_k\varphi(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k t_i\varphi(x_i),\end{aligned}$$

der den første ulikheten er konveksitet, og den andre er (2) for $n = k-1$. □