Interaktiv forelesning uke 39

Høsten 2022

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{4}$ Definer funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = xe^x$$

a) Vis at likningen

$$f(x) = y$$

har nøyaktig

1. én løsning når $y \in \{-e^{-1}\} \cup [0, \infty)$
2. to løsninger når $y \in (-e^{-1}, 0)$
3. ingen løsning når $y \in (-\infty, -e^{-1})$

> Her er $f'(x) = (1 + x)e^x$, som innebærer at f er minkende på $(-\infty, -1]$, har minimum i $x = -1$, og øker på $[-1, \infty)$. Merk også at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dette, sammmen med at $f(-1) = -e^{-1}$, gir konklusjonen. (Det hjelper å lage en skisse her.)

Det finnes et minste tall $a \in \mathbb{R}$ som er slik at f er injektiv på $[a, \infty)$. Vi lar W være inversen til f på dette intervallet. Funksjonen W har da definisjonsmengde på formen $[b, \infty)$.

b) Hva blir a og b?

> Vi så at f var økende på $[-1, \infty)$, og derfor injektiv der. Den er ikke injektiv på noe større intervall, da f minker til venstre for $x = -1$. Vi har derfor $a = -1$ og $b = -e^{-1}$.

c) Det er mulig å vise at W er deriverbar på (b, ∞). Vis at

$$W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

for alle $x \in (b, \infty)$.

> Per definisjon tilfredstiller W likningen $W(x)e^{W(x)} = x$ for alle $x \in (-e^{-1}, \infty)$. Implisitt derivasjon gir nå
>
> $$(1 + W(x))e^{W(x)}W'(x) = 1, \tag{1}$$
>
> eller
>
> $$W'(x) = \frac{1}{W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$
>
> ved å bruke likningen.

d) Finn $W'(0)$

> Siden $0 \in [-1, \infty)$ og $0e^0 = 0$ er $W(0) = 0$ per definisjon. Setter vi så inn i formelen i forrige oppgave finner vi $W'(0) = 1$.

e) Er W (ensidig) deriverbar i b?

> Nei. Hvis den var det måtte (1) fremdeles holdt for den ensidige deriverte i $-e^{-1}$, der $W(-e^{-1}) = -1$. Setter vi inn finner vi
>
> $$0 \cdot W'_+(-e^{-1}) = 1,$$
>
> som er umulig.

Bonusinfo

Denne funksjonen har fått navnet Lamberts W-funksjon av historiske grunner, og kan ikke uttrykkes ved hjelp av elementærfunksjoner. Den dukker opp i noen (uventede?) situasjoner. Det er for eksempel mulig å vise at

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = \frac{W(-\ln(x))}{-\ln(x)}$$

når venstresiden konvergerer; noe som skjer hvis og bare hvis $x \in [e^{-e}, e^{e^{-1}}]$. Prøv gjerne å anta at venstresiden konvergerer, og vis at likheten da nødvendigvis må holde for $x \in [e^{-e}, 1]$. (Det er ikke fryktelig vanskelig.)

For øvrig følger "fun fact"-en

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

fra formelen over.