Interaktiv forelesning uke 36

Høsten 2022

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{4}$ Man sier at $f\colon I \to I$ er en kontraksjon dersom det finnes en konstant $\alpha \in [0,1)$ som er slik at

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x - y|$$

for alle $x, y \in I$.

a) Vis at en kontraksjon er kontinuerlig

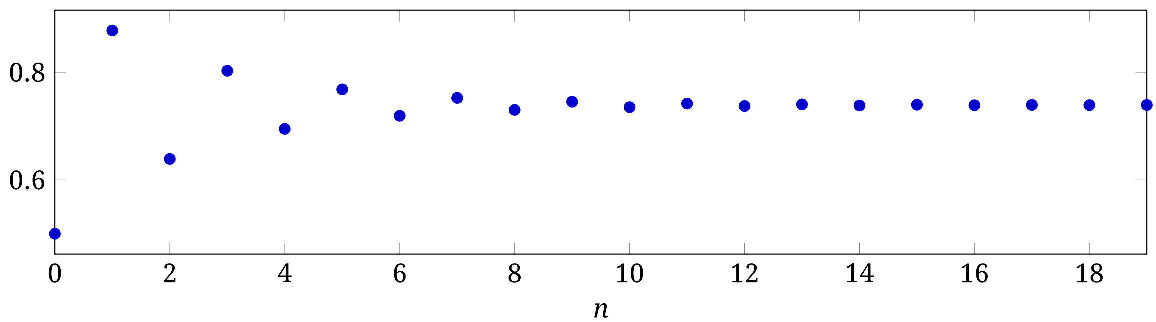
b) For hvilke verdier av β er funksjonen definert ved $g(x) := \beta x^2$ en kontraksjon på $[0,1]$?

Et punkt $x \in I$ som er slik at $f(x) = x$ kalles et fikspunkt

c) Vis at en kontraksjon ikke kan ha mer enn ett fikspunkt

Bonusinfo for interesserte: Banachs fikspunktteorem

Det går an å vise at $h(x) := \cos(x)$ definerer en kontraksjon på $[0,1]$. Velger vi et punkt $x_0 \in [0,1]$, og ser på følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definert ved at $x_n = h(x_{n-1})$ for $n \geqslant 1$, vil vi observere at denne virker å nærme seg fikspunktet $0.739085\ldots$



Illustrert med $x_0 = 0.5$

Dette er ikke en tilfeldighet!

Teorem. *La f være en kontraksjon på et lukket intervall I. Da har f et entydig fikspunkt $\hat{x} \in I$, og for enhver $x_0 \in I$ vil følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definert ved $x_n = f(x_{n-1})$ for $n \geqslant 1$ konvergere mot $\hat{x}$.*

Bevis. Vi ser at *hvis* en slik følge konvergerer mot et punkt $x \in I$, så må x være et fikspunkt. Dette fordi

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\Big) = f(x),$$

hvor vi har benyttet at en kontraksjon er kontinuerlig. Vi vet også at et eventuelt fikspunkt er entydig, fordi vi har sett at en kontraksjon ikke kan ha mer enn ett fikspunkt. Det holder altså å vise at disse følgene konvergerer.

La derfor $x_0 \in I$, og definer $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ som beskrevet i teoremet. Vi ser nå at

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \\ &\leqslant \alpha|x_n - x_{n-1}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \alpha^n|x_1 - x_0|\end{aligned}$$

for alle $n \geqslant 1$ ved induksjon. Dette kan vi så benytte til å se at

$$\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| &= |(x_{n+m} - x_{n+m-1}) + (x_{n+m-1} - x_{n+m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\leqslant |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant \left(\alpha^{n+m-1} + \alpha^{n+m-2} + \cdots + \alpha^n\right)|x_1 - x_0| \\
&= \alpha^n \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

for alle $n, m \geqslant 0$. Altså er

$$-\alpha^n \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \leqslant x_{n+m} - x_n \leqslant \alpha^n \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$$

for alle $n, m \geqslant 0$.

Om vi nå tar lim sup i m for fiksert n ser vi at

$$-\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \leqslant \limsup_{k\to\infty} x_k - x_n \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$$

for alle $n \geqslant 0$ (husk at $\alpha \in [0,1)$). Men da finner vi

$$0 \leqslant \limsup_{k\to\infty} x_k - \liminf_{k\to\infty} x_k \leqslant 0,$$

ved å ta lim inf i n. Dermed er

$$\limsup_{k\to\infty} x_k = \liminf_{k\to\infty} x_k,$$

slik at følgen konvergerer. □

(Ser du hvordan du kunne brukt dette teoremet til å vise konvergens i forrige ukes oppgave 3, selv med andre valg av a_1?)