TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 46

Høsten 2022

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge, og definer delsummene $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ for alle $n \geqslant 0$. Vi antar videre at $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

a) Hvorfor er potensrekkene

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

absolutt konvergente når $|x| < 1$?

b) Vis at

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = f(x)$$

for alle $|x| < 1$.

Hint: $s_n - s_{n-1} = a_n$ for alle $n \geqslant 1$. Du kan fritt manipulere absolutt konvergente rekker.

c) Bruk forrige punkt til å vise at

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

Hint: Del opp rekken i endelig mange ledd pluss "halen". For hver $\epsilon > 0$ finnes det en N som er slik at $|s_n| < \epsilon$ for alle $n \geqslant N$ (hvorfor?).

Vi har med dette vist det essensielle i *Abels teorem*:

Teorem (Abels teorem). *Dersom rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så er potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kontinuerlig fra venstre i $x = 1$.*

Bevis. Vi definerer en ny følge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ved at $b_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og $b_n = a_n$ for $n \geqslant 1$. Da er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$, og

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

for alle $|x| < 1$. Resultatet følger nå fordi vi har allerede vist at

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

for slike følger. □

(Abels teorem gjelder selvfølgelig også mer generelt på randen av konvergensintervallet til potensrekker. Ser du hvorfor?)

Bonusinfo

I uke 44 så vi at

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

definerer en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er uendelig mange ganger kontinuerlig deriverbar, og hvor $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geqslant 0$. En konsekvens av dette er at alle leddene i taylorrekken til f sentrert i $x = 0$ er identisk lik 0. Funksjonen er derfor et eksempel på en funksjon hvor taylorrekken konvergerer for *alle* $x \in \mathbb{R}$ (til 0), men hvor det er kun i $x = 0$ den konvergerer til rett verdi.

I TMA4120 Matematikk 4K kommer dere til å se at problemet her er at vi kun har sett på funksjonen med "reelle briller". Funksjonen f gir faktisk mening, med samme definisjon, på hele det *komplekse planet*. Vi skal ikke gå inn i noen detalj her, annet enn at den *imaginære aksen* består av tall på formen ix, hvor i er slik at $i^2 = -1$. Da ser vi at

$$f(ix) = e^{+x^{-2}}$$

for alle $x \neq 0$, og derfor at $f(ix) \to \infty$ når $x \to 0$. Funksjonen hadde en skjult singularitet i $x = 0$ som vi ikke oppdaget med kun de reelle tallene!