# Interaktiv forelesning uke 44

Høsten 2022

## Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ La $f$ være en $(n+1)$-ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et ikke-tomt åpent intervall $I$, og la $a \in I$.

**a)** Hvorfor er

$$\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

for alle $x \in I$ dersom $n \geqslant 1$?
(Merk at $0! = 1$.)

**b)** Benytt induksjon for å vise at

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

for alle $x \in I$.
(Her er $f^{(0)} = f$.)

Vi har med dette bevist Taylors teorem for restledd på integralform. Anta videre at $J$ er et lukket, begrenset intervall som er slik at $a \in J \subseteq I$.

**c)** Hvorfor er

$$K = \sup_{x \in J} |f^{(n+1)}(x)| < \infty?$$

**d)** Vis at

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

for alle $x \in J$.

## Bonusinfo

Vi kan definere en følge av polynomer $Q_n$ av grad $n$ ved at $Q_0(t) = 2$ og

$$Q_n(t) = (2 - 3nt)Q_{n-1}(t) + 2t^2 Q'_{n-1}(t)$$

for $n \geqslant 1$. Da er det ikke så vanskelig å vise ved induksjon at dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & x \neq 0, \end{cases}$$

så er

$$f^{(n)}(x) = e^{-x^{-2}} x^{-3n} Q_{n-1}(x^2)$$

for alle $x \neq 0$ og $n \geqslant 1$. Dette kan igjen brukes til å også konkludere at $f^{(n)}(0) = 0$ for *alle* $n \geqslant 0$.

Funksjonen $f$ er dermed uendelig mange ganger kontinuerlig deriverbar, og *alle* taylorpolynomene sentrert i $x = 0$ er identisk lik 0. Synes du dette er rart?