TMA4100 Matematikk 1

Interaktiv forelesning uke 43

Høsten 2022

Fra tidligere

Vi har sett at:

- $g: I \to I$ kalles en *kontraksjon* dersom
$$|g(x) - g(y)| \leqslant \beta |x - y|$$
for alle $x, y \in I$ og en $\beta \in [0, 1)$
- $\hat{x}$ kalles et *fikspunkt* for g hvis $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Banachs fikspunktteorem sier følgende:

Teorem. *Dersom g er en kontraksjon på et (ikke-tomt) lukket intervall I, så har g et entydig fikspunkt $\hat{x} \in I$. Følgen $\{g^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ konvergerer mot $\hat{x}$ uansett valg av x_0.*

(Her er $g^2(x_0) = g(g(x_0))$, *ikke* $g(x_0)^2$!)

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ Anta at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon, og at $a \in \mathbb{R}$ er slik at $f(a) = 0$ og $f'(a) \neq 0$. For enkelhets skyld skriver vi $I_\delta := [a - \delta, a + \delta]$ for $\delta > 0$.

a) Hvorfor er
$$M_\delta := \max_{x \in I_\delta} \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1$$
om $\delta > 0$ er liten nok?

b) Argumenter for at
$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
definerer en kontraksjon på I_δ dersom $\delta > 0$ er tilstrekkelig liten.
Hint: Sekantsetningen.

c) Hvorfor betyr dette at Newtons metode vil konvergere mot a for alle startverdier $x_0 \in I_\delta$?

d) Kan f ha mer enn én rot på I_δ?