

**Oppgave 1** Bruk av Eulers metode med  $f(x, y) = 1 + 2xy^2$ ,  $y_0 = y(0) = 1$  og  $h = 0.1$  gir

$$y(0.1) \approx y_1 = 1 + 0.1(1 + 2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1.1$$

og

$$y(0.2) \approx y_2 = 1.1 + 0.1(1 + 2 \cdot 0.1 \cdot 1.1^2) = 1.242.$$

**Oppgave 2** Delbrøkkoppspalting gir

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}.$$

Dermed får vi at et ubestemt integral til den gitte funksjonen blir

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 + x - 6} dx = \int \frac{1}{x - 2} dx + 2 \int \frac{1}{x + 3} dx = \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 3| = \ln |x - 2|(x + 3)^2.$$

Vi får da

$$\int_4^a \frac{3x - 1}{x^2 + x - 6} dx = \ln(a - 2)(a + 3)^2 - \ln 98.$$

Vi vet at funksjonen  $\ln x$  går mot uendelig når  $x$  går mot uendelig, så uttrykket over går mot uendelig når  $a$  går mot uendelig. Så det uegentlige integralet gitt i oppgaven divergerer.

**Oppgave 3** Ved å sette inn den oppgitte rekkeutviklingen for  $e^{-x}$  og foreta leddvis integrasjon får vi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot n!} + \dots \end{aligned}$$

Dette er en alternerende rekke der leddene går mot 0, så den konvergerer. Kall verdien vi får ved å kutte etter  $n$  ledd for  $L_n$ . Vi vet da at  $|I - L_n|$  er mindre enn absoluttverdien av ledd  $n + 1$ . Dvs at dersom vi velger  $n$  så stor at

$$\frac{1}{(n + 1)(n + 1)!} < 0.002$$

så er vi sikret den ønskede nøyaktigheten. Ved å prøve med verdier for  $n$  ser vi at  $n = 4$  gir  $\frac{1}{5 \cdot 5!} = \frac{1}{600} < 0.002$ , og at dette er den lavest mulige verdien for  $n$  vi kan ha for å være sikker.

**Oppgave 4** Med  $f$  som gitt i oppgaven og  $f(0)$  definert til å være 0 kan vi skrive

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

For  $x > 0$  og  $x \rightarrow 0$  vil  $\sqrt{x} \rightarrow 0$ , og tilsvarende vil for  $x < 0$  og  $x \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{-x} \rightarrow 0$ . Altså er  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$  som viser at  $f$  er kontinuerlig i  $x = 0$ .

For å sjekke deriverbarhet i  $x = 0$  ser vi på ( $h > 0$ )  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$ . Dette uttrykket går mot uendelig, så denne grenseverdien eksisterer ikke. Tilsvarende eksisterer heller ikke grenseverdien når vi går mot 0 fra venstre, så  $f$  er ikke deriverbar i  $x = 0$ . Grafen til  $f$  har en vertikal tangent i  $x = 0$ .

### Oppgave 5

- (i) Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}}$  konvergerer. Det kan vi se ved å bruke forholdstesten.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{2^{n/2}}{2^{(n+1)/2}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Når  $n \rightarrow \infty$  går dette mot  $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , og rekken konvergerer ved forholdstesten.
- (ii) Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$  divergerer. Det kan vi se ved å bruke grensesammenligningstesten med den divergente rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  (divergent  $p$ -rekke med  $p < 1$ ). Vi ser på forholdet mellom  $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$  og  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ :  $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} / \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}}$ . Dette uttrykket går mot  $1 > 0$  når  $n$  går mot uendelig. Dermed divergerer den gitte rekken ved grensesammenligningstesten.
- (iii) Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^2$  konvergerer. Det kan vi se ved å bruke grensesammenligningstesten med den konvergente rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Vi ser på forholdet mellom  $\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^2$  og  $1/n^2$ :  $\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^2 / \frac{1}{n^2} = \left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ . Det er kjent at  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Dermed får vi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = e^2 < \infty$ , og den gitte rekken konvergerer ved grensesammenligningstesten.

**Oppgave 6** Sett  $g(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$ . Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1 + \sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\cos^2 x + (1 + \sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

For å finne buelengden må vi regne ut buelengdeelementet

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \sqrt{1 + (-\sin x / \cos x)^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos x} dx.$$

Buelengden blir da

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx.$$

Fra tidligere i oppgaven vet vi at  $\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x}$ . Dermed får vi

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right) \Big|_0^{\pi/4} = \ln \frac{1 + 1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

**Oppgave 7** La  $x$  være avstanden fra punktet på stranda som er nærmest holmen bort til der båten treffer stranda. Da blir avstanden man må ro lik  $\sqrt{4 + x^2}$ , og avstanden man må gå blir lik  $3 - x$ . Den samlede tiden man bruker på hele distansen blir da

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{3 - x}{5}.$$

For å finne minste verdi av  $t(x)$  kan vi derivere  $t(x)$  og sette den deriverte lik 0. Vi får

$$t'(x) = \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

som forenkler seg til

$$5x = 3\sqrt{4 + x^2}.$$

Kvadrering på begge sider og forenkling gir  $16x^2 = 36$  som har positiv løsning  $x = \frac{3}{2}$ . Innsatt i uttrykket for  $t(x)$  får vi  $t(\frac{3}{2}) = \frac{68}{60}$ . Dette er gitt i timer, slik at den kortest mulige tiden er 1 time og 8 minutter.

**Oppgave 8**

For å finne overflatearealet regner vi først ut buelengdeelementet

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \cosh x dx.$$

Flateelementet er da gitt ved  $dS = 2\pi r(x) ds$  der  $r(x)$  er avstanden til omdreingsaksen, som i dette tilfellet er  $y = -1$ . Dermed blir  $r(x) = 1 + \cosh x$ , og vi får

$$S = 2\pi \int_0^1 (1 + \cosh x) \cosh x dx = 2\pi \int_0^1 (\cosh x + \cosh^2 x) dx.$$

Ved å bruke  $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$  får vi videre

$$S = 2\pi \left[ \sinh x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x \right]_0^1 = 2\pi \left( \sinh 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2 \right).$$

Dette er greit som svar, men ved å innføre  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - 1/e^x)$  kan svaret også angis som

$$S = \pi \left( 1 + e - \frac{1}{e} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} \right).$$

**Oppgave 9** Det første leddet i følgen,  $a_1 < 3$ . Anta så at ledd nr  $k$  er mindre enn 3, og vis at da må ledd nr  $k + 1$  også være mindre enn 3:

$$a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3.$$

Dette viser da at ledd nr  $k + 1$  er mindre enn 3, og dermed er alle leddene i følgen mindre enn 3 ved induksjon.

Ved utregning får vi  $a_2 = \sqrt{6 + 1} = \sqrt{7} > 1 = a_1$ . Dermed vet vi at  $a_1 < a_2$ , så anta at  $a_k < a_{k+1}$ . Vi får videre  $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + a_{k+1}} = a_{k+2}$ . Av dette følger, siden  $a_1 < a_2$ , at  $a_n < a_{n+1}$  for alle  $n \geq 1$ .

Vi har nå vist at vi har en følge som er monotont voksende og opptil begrenset, og en slik følge konvergerer.

Sett  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . La  $n \rightarrow \infty$  på begge sider i  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ . Da får vi  $a = \sqrt{6 + a}$ , som ved kvadrering og forenkling gir  $a^2 - a - 6 = 0$ . Denne likninga har to røtter, 3 og -2, men siden den grenseverdien vi er på jakt etter er positiv ( $> 1$ ), så må  $a = 3$ .

**Oppgave 10**

Ved inspeksjon ser vi at  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$  har et nullpunkt i  $x = 1$ . Ved polynomdivisjon får vi  $f(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4)$ , og ved inspeksjon ser vi videre at  $x^3 + 3x^2 - 4$  også har et nullpunkt i  $x = 1$ . Ny polynomdivisjon gir

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)^2(x + 2)^2.$$

Fra dette kan vi regne ut

$$f'(x) = 2(x - 1)(x + 2)^2 + 2(x - 1)^2(x + 2) = 2(x - 1)(x + 2)(2x + 1).$$

Drøfting av dette uttrykket gir at  $f'(x) > 0$  når  $-2 < x < -\frac{1}{2}$  og når  $x > 1$ . Videre er  $f'(x) < 0$  når  $x < -2$  og  $-\frac{1}{2} < x < 1$ . Funksjonen vokser altså i intervallene  $(-2, -\frac{1}{2})$  og  $(1, \infty)$  og den avtar i intervallene  $(-\infty, -2)$  og  $(-\frac{1}{2}, 1)$ .  $f(1) = f(-2) = 0$ , og for alle andre verdier av  $x$  er  $f(x) > 0$ , så  $f$  har en minste verdi, nemlig 0.  $f$  er et polynom av grad 4, så  $f(x) \rightarrow \infty$  når  $x \rightarrow \pm\infty$ , dvs.  $f$  har ingen største verdi.

Grafen til  $f$  er symmetrisk om den rette linja  $x = -\frac{1}{2}$  dersom funksjonsverdiene i  $x$ -verdier som ligger like langt fra  $x = -\frac{1}{2}$  på begge sider, er like store. Dette kan uttrykkes ved at  $f(x) = f(-x - 1)$  for alle  $x$ . Utregning gir

$$f(-x-1) = (-x-1-1)^2(-x-1+2)^2 = (-x-2)^2(-x+1)^2 = (x+2)^2(x-1)^2 = f(x).$$