Anbefalte oppgaver uke 47

Høsten 2020

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Siden

$$\tan x \cos x = \sin x,$$

får vi

$$\int \tan x \cos x \, dx = -\cos x + C.$$

$\boxed{2}$ Vi starter med å dele opp integralet i to ledd,

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \cos x \, dx.$$

Vi vet at (se side 122–125 i boka)

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \text{og}$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Altså er $\sin x$ den antideriverte til $\cos x$, og $\tan x$ den antideriverte til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Dermed har vi at

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \cos x \, dx = \tan x + \sin x + C.$$

Vi må huske å legge til integrasjonskonstanten, C, fordi vi har å gjøre med et ubestemt integral.

$\boxed{3}$ Vi følger samme fremgangsmåte som i forrige oppgave, og starter med å dele opp integralet i to ledd,

$$\int \frac{6(x-1)}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx = \int \frac{6x}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx - \int \frac{6}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx = 6\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx - 6\int x^{-\frac{4}{3}}\, dx.$$

Vi vet at

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}, \quad \text{og}$$
$$\frac{d}{dx}\left(-3x^{-\frac{1}{3}}\right) = (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{4}{3}}.$$

Altså er $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ den antideriverte til $x^{-\frac{1}{3}}$, og $-3x^{-\frac{1}{3}}$ den antideriverte til $x^{-\frac{4}{3}}$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
\int \frac{6(x-1)}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx &= 6\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx - 6\int x^{-\frac{4}{3}}\, dx \\
&= 6\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 6\left(-3x^{-\frac{1}{3}}\right) + C \\
&= 9x^{\frac{2}{3}} + 18x^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{9x+18}{x^{\frac{1}{3}}} + C = \frac{9(x+2)}{x^{\frac{1}{3}}} + C.
\end{aligned}$$

4 Det er to måtar å løyse differensiallikninga på. Før vi byrjar legg merkje med at $x \neq 0$.

Integrerande faktor:
Om vi skriv om likninga kan vi få han på forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = -\frac{1}{x}.$$

Reknar vi ut integralet av $\frac{-3}{x}$ får vi $-3\ln|x|$. Ved å gonge likninga med $e^{-3\ln|x|}$ gir

$$\frac{d\left(e^{-3\ln|x|}y\right)}{dx} = \frac{dy}{dx}e^{-3\ln|x|} - \frac{3}{x}e^{-3\ln|x|}y = -\frac{1}{x}e^{-3\ln|x|}.$$

Tar vi integralet og brukar substitusjonen $u = -\ln|x|$ får vi

$$e^{-3\ln|x|}y(x) = \int e^{-3\ln|x|}\left(-\frac{1}{x}\right)dx = \int e^{3u}du = \frac{1}{3}e^{3u} + C = \frac{e^{-3\ln|x|}}{3} + C.$$

Ved å forenkle likninga får vi det endelege svaret

$$y(x) = \frac{1}{3} + Ce^{-3\ln|x|} = \frac{1}{3} + C|x|^3.$$

Legg merke med at løysinga før og etter null ikkje har noko med kvarandre å gjere, sidan svara er separert av null. Dermed vil alle løysingane være på forma

$$y(x) = \begin{cases} 1/3 + C_1x^3, & x > 0 \\ 1/3 + C_2x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Separasjon av variablar:
Om vi i staden ser på differensiallikninga som ei separabel likning byrjar vi med å skrive ho som

$$\frac{dy}{y - 1/3} = 3\frac{dx}{x}$$

der vi antar at $y \neq 1/3$. Ved integrasjon får me

$$\ln|y - 1/3| = 3\ln|x| + C_0.$$

Forenklar vi likninga får vi

$$\left|y - \frac{1}{3}\right| = C_1|x|^3, \qquad C_1 > 0.$$

Dermed har vi fire tilfelle:

- $y > 1/3$ og $x > 0$ gir løysingen $y = \frac{1}{3} + C_1x^3$
- $y < 1/3$ og $x > 0$ gir løysingen $y = \frac{1}{3} - C_1x^3$
- $y > 1/3$ og $x < 0$ gir løysingen $y = \frac{1}{3} - C_1x^3$
- $y < 1/3$ og $x < 0$ gir løysingen $y = \frac{1}{3} + C_1x^3$.

Vi å analysere tilfella over kan vi slå dei saman til løysinga

$$y(x) = \begin{cases} 1/3 + C_2x^3, & x > 0 \\ 1/3 + C_3x^3, & x < 0 \end{cases}$$

der C_2 og C_3 er vilkårlege konstantar.

5 Den oppgitte ligningen er en førsteordens lineær differensialligning (se side 450 i boka). Vi bruker først metoden med integrerende faktor. Den integrerende faktoren er gitt som $e^{\mu(x)}$ der $\mu(x)$ er integralet av faktoren foran y-leddet,

$$\mu(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x.$$

Altså er den integrerende faktoren $e^{2\ln x} = x^2$. Vi multipliserer begge sider av ligningen med dette uttrykket,

$$\frac{dy}{dx}x^2 + 2yx = 1.$$

Vi gjenkjenner så venstre siden som den deriverte av x^2y, slik at

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y\right) = 1.$$

Vi integrerer begge sider med hensyn på x og får at

$$x^2y = x + C \implies y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

En annen metode vi kan bruke er å sette $y = k(x)e^{-\mu(x)}$, der $e^{-\mu(x)} = x^{-2}$ er løsningen av det homogene ligningssystemet

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0.$$

Vi setter så uttryket for y inn i differensialligningen, og prøver å bestemme hva $k(x)$ må være for at $y = k(x)x^{-2}$ skal være en løsning.

$$\begin{aligned}
k'(x)x^{-2} + k(x)(-2)x^{-3} + 2k(x)x^{-3} &= \frac{1}{x^2}\\
k'(x)x^{-2} &= \frac{1}{x^2}\\
k'(x) &= 1\\
k(x) &= \int dx = x + C.
\end{aligned}$$

Dermed er løsningen gitt ved $y = (x+C)x^{-2} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$. Dette er samme svar som når vi brukte den integrerende faktoren.

6 Vi bruker analysens fundamentalteorem (*The Fundamental Theorem of Calculus*, side 311–312 i boka) og deriverer begge sider av ligningen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(y(x)\right)^2}{1+x^2}.$$

Vi ser også fra ligningen at $y(0) = 1$. Dette er en separabel førsteordens differensialligning. Vi skriver om slik at vi får alle ledd avhengig av y på venstre siden og alle ledd avhengig av x på høyre siden. Deretter integrerer vi begge sider.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{1+x^2}\\
\int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{1+x^2}\\
-\frac{1}{y} &= \tan^{-1} x + C\\
y &= \frac{-1}{\tan^{-1} x + C}.
\end{aligned}$$

Ved bruk av $y(0) = 1$ får vi $C = -1$ og

$$y(x) = \frac{1}{1 - \tan^{-1} x}.$$

$\boxed{7}$ Me skal finna ei likning som skildrar kurva i xy-planet som går gjennom punktet $(x, y) = (2, 3)$, og som i alle punkt (x, y) har stigninga $2x/(1 + y^2)$. Dette tilsverer å løysa ei førsteordens, separabel differensiallikning,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + y^2},$$

som kan omskrivast og integrerast som følgjer,

$$\int (1 + y^2)\, dy = \int 2x\, dx.$$

Dette vert

$$y + \frac{y^3}{3} = x^2 + C_0,$$

som er det same som

$$y^3 + 3y - 3x^2 = C.$$

Me set så inn for $(2, 3)$ for å bestemma verdien av den ukjende konstanten C,

$$C = 3^3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2^2 = 24.$$

Dermed har me at likninga er

$$y^3 + 3y - 3x^2 = 24.$$

$\boxed{8}$ Vi ser på initialverdiproblemet

$$y' = x + y, \quad y(1) = 0.$$

La oss først bemerke at dette problemet har eksakt løsning $y_E = -(x + 1) + 2e^{x-1}$. Denne løsningen kan finnes blant annet ved hjelp av metoden med integrerende faktor (side 450 i boka). Vi vil bruke denne til å finne feilen som de numeriske metodene gir.

La $f(x, y) = x + y$. Forbedret Eulers metode (eller Heuns metode; *Improved Euler method* side 1004 i boka) er gitt ved iterasjonsskjemaet

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h, \\
u_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n + y_n), \\
y_{n+1} &= y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = y_n + h\frac{x_n + y_n + x_{n+1} + u_{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

I vårt tilfelle er startverdiene for iterasjonene $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$.

Med $h = 0.2$ gir første iterasjon

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2, \\
u_1 &= y_0 + h(x_0 + y_0) = 0 + 0.2(1 + 0) = 0.2, \\
y_1 &= y_0 + h\frac{x_0 + y_0 + x_1 + u_1}{2} = 0 + 0.2\frac{1 + 0 + 1.2 + 0.2}{2} = 0.24.
\end{aligned}$$

De resterende iterasjonene er gjengitt i tabellen under.

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1.000000	-	0.000000	0.000000
1	1.200000	0.200000	0.240000	0.002806
2	1.400000	0.528000	0.576800	0.006849
3	1.600000	0.972160	1.031696	0.012542
4	1.800000	1.558035	1.630669	0.020413
5	2.000000	2.316803	2.405416	0.031147

Med $h = 0.1$ får vi (dette bør gjøres på en PC):

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1.000000	-	0.000000	0.000000
1	1.100000	0.100000	0.110000	0.000342
2	1.200000	0.231000	0.242050	0.000756
3	1.300000	0.386255	0.398465	0.001252
4	1.400000	0.568312	0.581804	0.001845
5	1.500000	0.779985	0.794894	0.002549
6	1.600000	1.024383	1.040857	0.003380
7	1.700000	1.304943	1.323147	0.004358
8	1.800000	1.625462	1.645578	0.005504
9	1.900000	1.990136	2.012364	0.006843
10	2.000000	2.403600	2.428162	0.008402

Med $h = 0.05$ får vi:

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1.000000	-	0.000000	0.000000
1	1.050000	0.050000	0.052500	0.000042
2	1.100000	0.107625	0.110253	0.000089
3	1.150000	0.170766	0.173529	0.000140
4	1.200000	0.239705	0.242609	0.000196
5	1.250000	0.314740	0.317793	0.000258
6	1.300000	0.396183	0.399393	0.000325
7	1.350000	0.484362	0.487736	0.000399
8	1.400000	0.579623	0.583170	0.000479
9	1.450000	0.682329	0.686058	0.000566
10	1.500000	0.792861	0.796781	0.000662
11	1.550000	0.911620	0.915741	0.000765
12	1.600000	1.039028	1.043360	0.000877
13	1.650000	1.175528	1.180082	0.000999
14	1.700000	1.321586	1.326374	0.001131
15	1.750000	1.477693	1.482726	0.001274
16	1.800000	1.644362	1.649653	0.001429
17	1.850000	1.822136	1.827698	0.001596
18	1.900000	2.011583	2.017430	0.001777
19	1.950000	2.213301	2.219448	0.001971
20	2.000000	2.427920	2.434382	0.002182

Oppsummert ser vi at approksimasjonen av $y(2)$ stadig blir bedre når vi minsker steglengden h. Feilen går som $\mathcal{O}(h^2)$. Det vil si at når vi halverer h vil feilen minske med en faktor omlag $1/4$.