

## Anbefalte oppgaver uke 46

Høsten 2020

## Løsningsforslag

1 Vi starter med å skrive om rekken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \left(x - \frac{1}{4}\right)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - \frac{1}{4}\right)^n,$$

der  $a_n = 4^n/n^n$ . Vi gjenkjenner dette som en potensrekke med konvergenssentrum i  $x = 1/4$ . For å finne konvergensradiusen,  $R$ , ser vi på grensen

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{4^n}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at  $R = \infty$  (se side 533 i boka) og at rekken konvergerer for alle  $x$ .

2 Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

La oss istedenfor studere potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Observer at ved å sette  $x = 1/2$  er denne lik rekken gitt i oppgaven.

Den andre summen i rekken er en geometrisk rekke, og vi vet at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{når } |x| < 1.$$

La oss nå følge fremgangsmåten i eksemplene 4 og 6 i boka. Vi deriverer uttrykket over med hensyn på

$x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \\ \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ 1 + 2x + 3x^2 + \dots &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Vær oppmerksom på at denne ligningen også gjelder for  $|x| < 1$ .

Legg så merke til at det første leddet i den første summen i potensrekken vår er null, slik at vi har at

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

I den siste likheten har vi brukt uttrykket vi fant ved derivasjon ovenfor.

Vi har altså vist at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad \text{når } |x| < 1.$$

Spesielt, for  $x = 1/2$ , har vi vist at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

- 3 Vi bruker den trigonometriske identiteten  $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$  og skriver om det oppgitte uttrykket,

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Vi bruker så maclaurinrekken til  $\cos x$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Ved å sette denne inn i uttrykket over får vi at

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{2 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

Siden maclaurinrekken til  $\cos x$  er gyldig for alle  $x$ , er også denne det.

- 4 Vi skal finne maclaurinrekken til funksjonen

$$L(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Vi bruker den kjente rekken til  $\cos x$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Ved å bruke substitusjonen  $x = t^2$ , finner vi at

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots$$

Vi kan nå finne maclaurinrekken til  $L(x)$  ved å integrere opp denne ledd for ledd,

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \left( 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots \right) dt \\ &= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} x^{4n+1}. \end{aligned}$$

Siden maclaurinrekken til  $\cos x$  er gyldig for alle  $x$ , er denne også det.

5 Med  $x = 0.5$  har vi fra forrige oppgave at

$$L(0.5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)! 2^{4n+1}}.$$

Dette er en alternerende rekke. Videre ser vi at  $|a_n|$  er avtagende, slik at  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$  for alle  $n \geq 0$ , og at  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Altså vet vi fra den alternerende rekketesten at denne rekken konvergerer. Dersom vi lar  $s_N$  være summen av alle ledd opp til  $n = N$ ,

$$s_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)! 2^{4n+1}},$$

vet vi at feilen er begrenset av absoluttverdien til det neste leddet. Det vil si at

$$|L(0.5) - s_N| \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{(4N+5)(2N+2)! 2^{4N+5}}.$$

Vi ønsker å finne  $L(0.5)$  med tre desimalers nøyaktighet. Dette er oppfylt når

$$\frac{1}{(4N+5)(2N+2)! 2^{4N+5}} < 0.0005.$$

Ved å sette inn for ulike verdier av  $N$ , ser vi at denne ulikheten holder for  $N \geq 1$ . Det betyr at vi kun trenger å ta med to ledd. Altså er

$$L(0.5) \approx \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)! 2^{4n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2^5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} \approx 0.497$$

med tre desimalers nøyaktighet.

6 Vi skal evaluere grensen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)}$$

Observer at dette er et uttrykk er på ubestemt form  $[0/0]$ . Vi starter med å skrive om telleren ved å bruke maclaurinrekken til  $e^x$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Denne gjelder for alle  $x$ , og telleren kan nå uttrykkes som

$$(e^x - 1 - x)^2 = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \right)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5).$$

I den siste likheten har vi brukt at det eneste leddet med polynomgrad mindre enn 5 som fremkommer ved å kvadrere uttrykket i parantesen er  $\frac{x^4}{4}$ . Alle andre ledd inngår i leddet  $\mathcal{O}(x^5)$ .

For å forenkle nevneren, finner vi først maclaurinrekken til  $\ln(1 + x^2)$ . Vi vet at

$$\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n, \quad \text{for } -1 < y \leq 1.$$

Ved å la  $y = x^2$  får vi at

$$\ln(1 + x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$$

Denne gjelder for  $-1 < x^2 \leq 1$  eller ekvivalent for  $|x| \leq 1$ . Nevneren kan nå skrives som

$$x^2 - \ln(1 + x^2) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} - \dots = \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$$

Vi er nå klare for å evaluere grensen,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{O}(x)}{2 + \mathcal{O}(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

**7** Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^2}{(1 + 2^n)(1 + n\sqrt{n})}.$$

Ved å skrive ut nevneren kan vi vise at

$$a_n = \frac{n^2}{1 + 2^n + n\sqrt{n} + n\sqrt{n}2^n} \leq \frac{n^2}{n\sqrt{n}2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} = b_n.$$

Det følger nå av sammenligningstesten at rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer dersom  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  gjør det. For å vise at  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerer kan vi bruke forholdstesten. Vi vet at  $b_n > 0$  for alle  $n$ . Videre er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Det følger derfor av forholdstesten at  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerer. Det betyr at  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  også konvergerer.

8 Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(5-2x)^n}{n}$$

Legg først merke til at dersom vi velger  $|5-2x| > 1$  divergerer rekken fordi  $a_n$  ikke konvergerer mot null. Området  $|5-2x| > 1$  er ekvivalent med at  $x < 2$  eller  $x > 3$ .

Vi sjekker så for absolutt konvergens ved å se på leddene

$$|a_n| = \frac{|5-2x|^n}{n}.$$

Vi kan vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|5-2x|^{n+1} \frac{n+1}{n}}{|5-2x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |5-2x| \frac{n}{n+1} = |5-2x|.$$

Det følger av forholdstesten at rekken er absolutt konvergent når  $0 \leq |5-2x| < 1$  eller ekvivalent når  $2 < x < 3$ . Vi vet at absolutt konvergens impliserer konvergens. Derfor kan vi konkludere med at rekken er konvergent for alle  $x \in (2, 3)$ .

Endepunktene  $x = 2$  og  $x = 3$  må vi sjekke spesielt. For  $x = 2$  har vi at  $a_n = \frac{1}{n}$ . Denne rekken er som kjent divergent.

For  $x = 3$  har vi at  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Dette er en alternerende rekke der

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = |a_n|$$

og der  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Det følger av den alternerende rekketesten at rekken konvergerer. Derimot er  $|a_n| = \frac{1}{n}$ , slik at rekken ikke er absolutt konvergent.

Oppsummert har vi at rekken er

- Divergent for  $x \leq 2$  eller  $x > 3$ .
- Absolutt konvergent for  $x \in (2, 3)$ .
- Betinget konvergent for  $x = 3$ .

9 Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

La oss heller studere potensrekken

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

Vi ser at ved å sette  $x = \pi$  får vi den opprinnelige rekken. Vi ønsker nå å kunne gjenkjenne denne rekken som en kjent maclaurinrekke. Vi vet at maclaurinrekken til  $\sin x$  er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Denne ligner til en viss grad på vår rekke. La oss starte med å gjøre et variabelskifte  $m = n - 1$ , slik at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-2}}{(2m+1)!}$$

Nå er nevneren lik. La oss så bruke at  $(-1)^{m+1} = (-1)(-1)^m$  og at  $x^{2m-2} = x^{-3}x^{2m+1}$ . Da har vi at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^m x^{-3} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = (-x^{-3}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Nå er også telleren i summen lik. Den eneste forskjellen er nå startpunktet for summen. Husk at generelt gjelder det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - b_0.$$

Det første leddet i summen vår er  $x$ , slik at

$$S(x) = (-x^{-3}) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} - x \right).$$

Vi kan nå sette inn for maclaurinrekken til  $\sin x$ . Det gir at

$$S(x) = (-x^{-3}) (\sin x - x) = \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Innsatt  $x = \pi$  har vi at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!} = S(\pi) = \frac{\pi - \sin \pi}{\pi^3} = \frac{1}{\pi^2}.$$