Anbefalte oppgaver uke 45

Høsten 2020

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^2\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

konvergerer eller divergerer. Rekken er geometrisk, og vi har

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Siden leddene er positive, konvergerer rekken også absolutt.

$\boxed{2}$ Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

konvergerer eller divergerer. Siden absolutt konvergens impliserer konvergens er det naturlig å starta med å se på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

VI bruker forholdstesten og finner

$$\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

og dermed er rekka absolutt konvergent.

$\boxed{3}$ Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}.$$

Legg merke til at

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{for } n \text{ like,} \\ -1, & \text{for } n \text{ odde.} \end{cases}$$

Vi har altså en alternerende rekke. Derfor prøver vi med den alternerende rekketesten (*The alternating series test*, side 522 i boka). Vi har at

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{100\cos((n+1)\pi)}{2(n+1)+3} \right| = \frac{100}{2n+5},$$

$$|a_n| = \left| \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} \right| = \frac{100}{2n+3}.$$

Altså er $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for alle n. Det vil si at leddene er synkende i størrelse (i absolutt verdi). I grensen $n \to \infty$ har vi at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} = 0.$$

Alle betingelsene for den alternerende rekketesten er derfor oppfylt, og vi konkluderer med at rekken konvergerer.

Vi undersøker om rekken er absolutt konvergent ved å se på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}.$$

Vi bruker grensesammenligningstesten (*A limit comparison test*, side 515 i boka) og sammenligner med den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, der $b_n = 1/n$. Både $|a_n|$ og b_n er positive for alle n, og dessuten er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100n}{2n+3} = 50.$$

Det følger at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er derfor betinget konvergent.

$\boxed{4}$ Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = (-1)^n \frac{3^n}{n!}.$$

Teorem 15, side 523 i boka, gir en øvre grense på absoluttverdien av feilen,

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|.$$

For å kunne bruke denne må betingelsene i den alternerende rekketesten være oppfylt, slik at rekken faktisk konvergerer. Vi ser at a_n er alternerende siden faktoren $(-1)^n$ alternerer mellom -1 og 1, mens faktoren $\frac{3^n}{n!}$ er positiv for alle n. Videre er

$$|a_{n+1}| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3 \cdot 3^n}{(n+1)n!} = \frac{3}{n+1}|a_n|.$$

Det vil si at $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for $n \geq 2$. Til slutt kan vi vise at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Vi har her brukt at $n!$ vokser raskere enn x^n for alle reele tall x (se Teorem 3 side 502 i boka).

Vi ønsker nå å finne den minste verdien av n slik at $|s - s_n| \leq 0.001$. Fra ulikheten over er dette oppfylt når

$$|a_{n+1}| \leq 0.001$$
$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0.001.$$

Ved å sette inn for stigende verdier av n, ser vi at dette er oppfylt når $n \geq 12$. Vi må altså ta med minimum 12 ledd for å approksimere summen s med en feil mindre enn 0.001.

$\boxed{5}$ Me skal finna dei verdiane for x som gjer at rekkja

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n+3}$$

konvergerer absolutt, konvergerer betinga eller divergerer. Det er alltid naturleg å starta med den absolutte konvergensen, så me ser på

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n+3}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-1|^n}{2n+3}.$$

Forholdstesten gjev oss

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-1|^{n+1}}{2(n+1)+3}\frac{2n+3}{|x-1|^n} = |x-1|\frac{2n+3}{2n+5} \xrightarrow{n\to\infty} |x-1|.$$

Frå dette ser me at rekkja konvergerer absolutt for $|x-1|<1$, det vil seia $0<x<2$. Me ser òg at rekkja divergerer for $|x-1|>1$, altså for $x<0$ og $x>2$. Då gjenstår det å sjekka om rekkja konvergerer betinga i punkta $x=0$ og $x=2$. Om ein set $x=0$ får ein

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{2n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3} > \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,$$

så rekkja er divergent i dette punktet. Om ein i staden set $x=2$ får ein

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3},$$

som er ei alternerande rekkje. Dermed kan me bruka alternerande rekkje-testen på side 522 i boka, og me sjekkar om kvart av dei tre punkta er oppfylt. For det første ser me at

$$a_n a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+3}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+5} = \frac{-1}{(2n+3)(2n+5)} < 0$$

for alle $n\geq 0$, for det andre er

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3} = |a_n|$$

for $n\geq 0$, og for det tredje er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} = 0.$$

Alle punkta er dermed oppfylte og me kan slå fast at rekkja er betinga konvergent i $x=0$.

$\boxed{6}$ Me skal finna dei verdiane for x som gjer at rekkja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

konvergerer absolutt, konvergerer betinga eller divergerer. Som vanleg startar me med å sjå om rekkja konvergerer absolutt,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|1+\frac{1}{x}\right|^n.$$

Me bruker forholdstesten på denne rekkja,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\frac{|x+1|}{|x|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x+1|}{|x|},$$

og finn at rekkja konvergerer absolutt for $|x+1| < |x|$. Det vil seia når avstanden frå x til -1 er mindre enn avstanden frå x til 0, som igjen betyr at $x < -1/2$. Me har då òg at rekkja divergerer for $x > -1/2$. Det gjenstår dermed å sjekka om rekkja konvergerer betinga i $x = -1/2$, og ved innsetjing av denne verdien får me at rekkja vert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{-1/2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Dette er den alternerande harmoniske rekkja som me veit at konvergerer, og dermed er rekkja betinga konvergent i $x = -1/2$.

$\boxed{7}$ Om ein skriv den n-te partialsummen som $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(k^2+4)$ har ein ifølgje boka side 513 at summen må liggja i intervallet $[s_n + A_{n+1}, s_n + A_n]$, der $A_n := \int_n^\infty 1/(x^2+4)\,dx$. Me finn at

$$\begin{aligned} A_n &= \int_n^\infty \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_n^R \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_n^R \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n}{2}\right), \end{aligned}$$

og dermed har me at

$$s \in \left[s_n + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n+1}{2}\right), s_n + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n}{2}\right)\right].$$

Om me no vel midtpunktet på dette intervallet, s_n^*, til å tilnærma s har me feilestimatet

$$|s - s_n^*| \le \frac{A_n - A_{n+1}}{2} = \frac{1}{4}\left(\arctan\left(\frac{n+1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{n}{2}\right)\right).$$

Ved innsetjing av ulike verdiar for n i uttrykket ovanfor og litt prøving og feiling finn ein at for $n = 22$ er $|s - s_n^*| \le 0.00098$, altså treng ein minst 22 ledd i partialsummen for at feilen skal vera mindre enn 0.001.

$\boxed{8}$ Me vil finna ein øvre skranke for feilen $s - s_n$, der

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)!}.$$

Dette minner om Example 7, side 518 i boka så me vil prøva same framgangsmåte her. Me ser at

$$
\begin{aligned}
0 < s - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} = \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+5)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(2n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2(n+1)(2(n+1)+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2(n+1)(2(n+1)+1)2(n+2)(2(n+2)+1)} + \cdots \right) \\
&< \frac{1}{(2n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(2(n+1))^2} + \frac{1}{(2(n+1))^4} + \cdots \right),
\end{aligned}
$$

der me har brukt at $2(n+1) < 2(n+1)+1 < 2(n+2) < \cdots$. Me har no ein geometrisk sum inni parantesen og dermed kan me estimera feilen med

$$
0 < s - s_n < \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{(2(n+1))^2}} = \frac{1}{(2n+1)!}\frac{4(n+1)^2}{4(n+1)^2 - 1}.
$$

Me prøver oss fram med å setja inn for n i uttrykket til høgre, og finn at for $n = 2$ er $s - s_n < 3/350 \approx 0.009 > 0.001$, medan for $n = 3$ er $s - s_n < 4/19845 \approx 0.0002 < 0.001$. Altså treng ein berre tre ledd for at feilen skal vera mindre enn 0.001. Dette er ein konsekvens av at $n!$ veks såpass raskt, og ein ser at det neste leddet i rekkja, $1/7! = 1/5040$, allereie er mykje mindre enn 0.001.