Anbefalte oppgaver uke 44

Høsten 2020

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi er gitt følgen

$$\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n n}{e^n}\right\}.$$

De første leddene i følgen er

$$a_1 = -\frac{1}{e}, \quad a_2 = \frac{2}{e^2}, \quad a_3 = -\frac{3}{e^3}, \quad a_4 = \frac{4}{e^4}.$$

Siden e^n vokser raskere enn n, ser vi at følgen er oppad begrenset av $2/e^2$ og nedad av $-1/e$. Videre er det en alternerende følge, da annenhvert ledd er positivt og negativt. Vi ser også at

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim \frac{n}{e^n} = 0.$$

Det betyr at følgen konvergerer mot 0.

$\boxed{2}$ Vi beregner ved bruk at l'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5!}{e^n} = 0.$$

$\boxed{3}$ https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/sif5003_1999-08-02_lf.pdf

$\boxed{4}$ Dette er en geometrisk rekke med $k = 1/e$. Siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k},$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n = k\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k},$$

får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}.$$

$\boxed{5}$ La oss starte med å skrive om rekken til en sum av to rekker,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}.$$

Dette minner om noe som ligner på geometriske rekker. For en geometrisk rekke (sidene 505–507 i boka) har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

når $|r| < 1$. Observer at ved å endre summasjonsgrensene kan vi skrive denne regelen på ekvivalent form

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}.$$

Vi ønsker nå å skrive om de to rekkene på denne formen. Vi starter med den første,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

På tilsvarende vis får vi for den andre summen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Den totale summen får vi så ved å legge sammen de to bidragene,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

6 I denne oppgaven bruker vi sammenligningstesten (Teorem 9 side 514 i boka). For $n > 0$ har vi at

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er en p-rekke (se side 512 i boka) og konvergerer siden $p = 3/2 > 1$. Ettersom $a_n \le b_n$, konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved sammenligningstesten.

7 Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$$

konvergerer eller divergerer. Her er det nyttig å huske at logaritmer vokser saktere enn alle potenser, det vil si at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad a > 0,$$

som oppgitt i Teorem 5 på side 184 i boka. Vi bruker derfor sammenligningstesten, og sammenligner med rekken $b_n = 1/n$, som vi vet divergerer. Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(\ln n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6} = \infty,$$

der vi har brukt l'Hôpital gjentatte ganger. Ved sammenligningstesten (Teorem 10 side 515 i boka), divergerer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^3}$.