Anbefalte oppgaver uke 43

Høsten 2020

Løsningsforslag

1 Vi bruker taylorpolynom til å løse denne oppgaven. Taylorpolynomet (maclaurinpolynomet) til $\sin x$ om $x = 0$ er gitt som (side 278 i læreboken)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi setter dette inn i grenseuttrykket og får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)\right)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Denne oppgaven kan også løses ved hjelp av l'Hôpitals regel, men denne må da anvendes tre ganger.

2 Me vil linearisera $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ om $x = 1$, altså vil me finna

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

for $a = 1$. Me deriverer og finn

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}.$$

Ved innsetting i uttrykket for L finn me då

$$L(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

3 Me vil linearisera $f(x) = 1/\sqrt{x}$ om $x = 4$, altså vil me finna

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

for $a = 4$. Me deriverer og finn

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Ved innsetting i uttrykket for L finn me då

$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x - 4) = -\frac{x}{16} + \frac{3}{4}.$$

$\boxed{4}$ Lineariseringen av en funksjon f om et punkt a er gitt ved (Definisjon 8, side 267 i læreboken)

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

I vårt tilfelle er $f(x) = \cos(2x)$ og $a = \frac{\pi}{3}$. Dessuten har vi at

$$f'(x) = -2\sin(2x).$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} L(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ rundt punktet $x = a$ er gitt ved

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3.$$

Nå er $f(x) = \cos x$, og $a = \pi/4$, så vi får

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Vi starter med å regne ut de tre første deriverte til $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Vi bruker så definisjonen av et andreordens taylorpolynom for f rundt $x = a$ (side 273 i læreboken), og regner ut $P_2(x)$ med $a = 64$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(64) + f'(64)(x - 64) + \frac{f''(64)}{2}(x - 64)^2 \\ &= \sqrt{64} + \frac{1}{2} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - 64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 64^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 64)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(x - 64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{152}(x - 64)^2 \\ &= 8 + \frac{x - 64}{16} - \frac{(x - 64)^2}{4096}. \end{aligned}$$

Vi finner så en approksimasjon til $\sqrt{61}$ ved sette inn $x = 61$,

$$\sqrt{61} \approx P_2(61) = 8 - \frac{3}{16} - \frac{9}{4096} \approx 7.810\,302\,734.$$

Fra Taylors teorem (side 275 i læreboken), vet vi at feilen er gitt som ($n = 2$)

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3}(x-64)^3,$$

for en s mellom a og x. Vi ønsker å finne en øvre grense for feilen, det vil si at vi må finne den verdien av s som gjør $f'''(s)$ størst. Vi vet at $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ er synkende på intervallet $[61, 64]$, slik at

$$\max_{s\in[61,64]} f'''(s) = f'''(61) = \frac{3}{8}61^{-\frac{5}{2}}.$$

Dette betyr at vi kan finne en øvre grense på feilen,

$$|E_2(x)| \leq \left|\frac{f'''(61)}{6}(x-64)^3\right| = \frac{f'''(61)}{6}|x-64|^3.$$

For $x = 61$ får vi at

$$|E_2(61)| \leq \frac{3}{8\cdot 6}61^{-\frac{5}{2}}|61-64|^3 \approx 0.000\,058\,066.$$

Det minste intervallet som vi med sikkerhet kan si inneholder $\sqrt{61}$ er derfor

$$(P_2(61) - 0.000\,058\,066, P_2(61) + 0.000\,058\,066) = (7.810\,244\,668, 7.810\,360\,800).$$

Fra kalkulatoren vet vi selvsagt at

$$\sqrt{61} \approx 7.810\,249\,676$$

med ni desimalers nøyaktighet. Vi ser at dette er innenfor intervallet.

$\boxed{7}$ Taylors formel av grad 6 for $f(x)$ rundt $x = a$ er

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots \\ + \frac{f^4(a)}{24}(x-a)^4 + \frac{f^5(a)}{120}(x-a)^5 + \frac{f^6(a)}{720}(x-a)^6 + \frac{f^7(s)}{5140}(x-a)^7, \end{aligned}$$

der s ligger mellom x og a. Siden

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln x = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

og $a = 1$, får vi

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + \frac{1}{7s^7}(x-1)^7,$$

der s ligger mellom 1 og x. Lagrange-resten er

$$E_n(x) = \frac{1}{7s^7}(x-1)^7.$$

$\boxed{8}$ Vi lar $f(x) = \sin^2 x$. Taylor-polynomet av grad 4 til f om $x = 0$ er gitt som

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Vi finner først de deriverte til f,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin^2 x, & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= 2\sin x\cos x = \sin 2x, & f'(0) &= 0,\\
f''(x) &= 2\cos 2x, & f''(0) &= 2,\\
f^{(3)}(x) &= -4\sin 2x, & f^{(3)}(0) &= 0,\\
f^{(4)}(x) &= -8\cos 2x, & f^{(4)}(0) &= -8.
\end{aligned}$$

Ved innsetting finner vi

$$P_4(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$