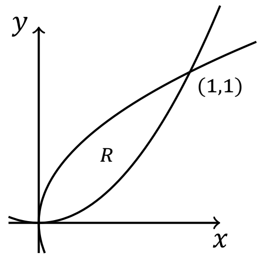
TMA4100 Matematikk 1

Anbefalte oppgaver uke 41

Høsten 2020

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi tegner først opp området R i xy-planet som skal roteres om x-aksen for å danne omdreiningslegemet S.



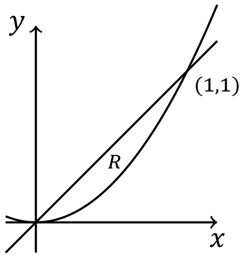
Først bruker vi skivemetoden for å finne volumet V til S. Skivene har her et hull i midten med radius $y = x^2$ og en ytre radius $y = \sqrt{x}$. Volumet av en infinitesimal tynn skive med bredde dx er da $dV = \pi((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx$. Ved å summere over alle slike skiver finner vi det totale volumet til S:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{x=0}^{x=1} dV \\
&= \pi \int_0^1 x - x^4 \, dx \\
&= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{3\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

Vi bruker nå sylinderskallmetoden for å komme fram til det samme svaret. Vi inverterer funksjonene som beskriver R slik at $y = \sqrt{x}$ tilsvarer $x = y^2$ og $y = x^2$ tilsvarer $x = \sqrt{y}$. Sylinderskallene har radius y og høyde $\sqrt{y} - y^2$. Volumet av et infinitesimal sylinderskall med tykkelse dy blir da $dV = 2\pi y(\sqrt{y} - y^2)$. Ved å summere over alle slike sylinderskall finner vi det totale volumet til S:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{y=0}^{y=1} dV \\
&= 2\pi \int_{y=0}^{y=1} y^{3/2} - y^3 \, dy \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{4}{y^4} \right) \Bigg|_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{3\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ Vi tegner først opp området R i xy-planet som skal roteres om henholdsvis x- og y-aksen.



Vi ser at kurvene $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$ skjærer hverandre i $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = (1, 1)$.

a) Vi roterer R om x-aksen. Vi deler området inn i skiver med ytre radius x og indre radius x^2. Volumet av omdreiningslegemet blir da

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

b) Vi roterer R om y-aksen. Vi deler området inn i sylinderskall med radius x og høyde $x - x^2$. Volumet av omdreiningslegemet blir da

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\,(f(x) - g(x))\,dx = 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Legemet er 6 meter høyt og det horisontale tversnittet z meter over grunnflata er et rektangel med lengde $2 + z$ meter og bredde $8 - z$ meter. En tynn horisontal skive av legemet med høyde dz vil da ha volum $dV = (2 + z)(8 - z)\,dz$. Det totale volumet finner vi ved å integrere fra $z = 0$ til $z = 6$ meter:

$$\begin{aligned} V &= \int_{z=0}^{z=6} dV \\ &= \int_0^6 (2 + z)(8 - z)\,dz \\ &= \int_0^6 \left(16 + 6z - z^2\right) dz \\ &= \left(16z + 3z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\bigg|_0^6 \\ &= 96 + 108 - 72 \\ &= 132, \end{aligned}$$

der enheten er m^3.

$\boxed{4}$ Lengden s til en kurve $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er gitt som (se side 407 i boka)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Kurven vår er gitt som $y^2 = (x-1)^3$, så vi deriverer derfor implisitt,

$$\begin{aligned} 2y\frac{dy}{dx} &= 3(x-1)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3(x-1)^2}{2y}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9(x-1)^4}{4y^2} = \frac{9(x-1)^4}{4(x-1)^3} = \frac{9}{4}(x-1).$$

Legg merke til at $\frac{dy}{dx}$ er definert for alle $x, y > 0$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)}\, dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{9x-5}\, dx. \end{aligned}$$

Vi lar så $u = 9x - 5$ slik at $du = 9\, dx$ eller $dx = \frac{1}{9}\, du$. Integrasjonsgrensene blir $u_1 = 9 \cdot 1 - 5 = 4$ og $u_2 = 9 \cdot 2 - 5 = 13$.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{18}\int_4^{13} u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{18}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} \\ &= \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right) \approx 1.44. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi bruker formelen på s. 411 i læreboken, og får

$$A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{8}\int_0^{16} \sqrt{1+u}\, du = \frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 1).$$

Merk at vi ikke trenger absoluttverditegn på x, siden $0 \le x \le 2$.

$\boxed{6}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2016h.pdf`

$\boxed{7}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/tma4100_2013-08-05_bm.pdf`