

## Anbefalte oppgaver uke 39

Høsten 2020

## Løsningsforslag

- 1 Gitt en funksjon  $f(x)$ , vet vi at vi kan approksimere arealet,  $A$ , begrenset av  $y = 0$ , kurven  $y = f(x)$ ,  $x = a$  og  $x = b$  som en sum av  $n$  rektangler med bredde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  og høyde  $f(x_i)$ , der  $x_i = a + i\Delta x$  og  $i = 1, \dots, n$ ,

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x.$$

Se figurene side 297 i boka for en illustrasjon. Vi ønsker derfor å skrive om vår sum på en slik form,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( 2 + 3\frac{i}{n} \right).$$

Med  $a = 0$  og  $b = 1$  har vi  $\Delta x = \frac{1}{n}$  og  $x_i = \frac{i}{n}$ , slik at

$$S_n = \sum_{i=1}^n (2 + 3x_i)\Delta x.$$

Ved sammenligning med summen øverst i denne oppgaven, ser vi at vår sum er en approksimasjon til arealet begrenset av  $y = 0$ ,  $y = 2 + 3x$ ,  $x = 0$  og  $x = 1$ . Siden  $y = 2 + 3x$  er en rett linje, er dette området et trapes med høyde 1 og sidekanter 2 og 5, og med areal,

$$A = \frac{2+5}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}.$$

Ved å la  $n \rightarrow \infty$  vil summen  $S_n$  gå mot dette arealet. Altså er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{2}.$$

- 2 Vi er gitt funksjonen  $f(x) = 1 - x$ . Vi deler intervallet  $[0, 2]$  inn i  $n$  like store underintervall  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , med størrelse  $\Delta x = \frac{2}{n}$ , og der  $x_i = i\Delta x = \frac{2i}{n}$ . Mengden av punkter  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  er nå en *partisjon*,  $P_n$ , av intervallet  $[0, 2]$ . Siden  $f(x)$  er en synkende funksjon for alle  $x$ , har vi at minimum av  $f$  på intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$  er  $l_i = x_i$ , og tilsvarende at maksimum på intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$  er  $u_i = x_{i-1}$ . Den nedre Riemann-summen for  $f$  og  $P_n$  er nå gitt ved (se Definisjon 2 side 300 i boka)

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(l_i)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} = 2 - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 - \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2 - \frac{2n^2 + 2n}{n^2} = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Her har vi blant annet brukt summeringsreglene (a) og (b) i Teorem 1, side 291 i boka. På tilsvarende måte kan vi finne et uttrykk for den øvre Riemann-summen,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_{i-1}) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(i-1)}{n} = 2 - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= 2 - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 = 2 - \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n} \\ &= 2 - \frac{2n^2 + 2n}{n^2} + \frac{4}{n} = -\frac{2}{n} + \frac{4}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Vi ser at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = 0.$$

Dette betyr at

$$\int_0^2 (1-x) dx = 0.$$

**Kommentar:** Hvorfor impliserer  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = L$  at integralet eksisterer?

Fra definisjonen på et bestemt integral (Definisjon 3, side 302 i boka) har vi at  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$  dersom det bare finnes et tall  $I$  slik at for alle partisjoner  $P$  av  $[a, b]$ , så har vi at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P). \quad (*)$$

Vi må altså vise at denne betingelsen gjelder. La  $P$  være en vilkårlig partisjon av  $[a, b]$ . Vi kan da finne en uniform partisjon  $P_{n^*}$  som er like fin eller finere enn  $P$  ved å velge  $n^*$  stor nok. Da vet vi at

$$L(f, P_{n^*}) \geq L(f, P).$$

Dette gjelder også i grensen  $n \rightarrow \infty$ , slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) \geq L(f, P).$$

Siden  $P$  er vilkårlig, vil denne ulikheten gjelde for alle  $P$ . Tilsvarende kan vi vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) \leq U(f, P),$$

for alle  $P$ . Ved å sette sammen disse ulikhetene har vi at

$$L(f, P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = L = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) \leq U(f, P),$$

for alle  $P$ . Siden betingelsen (\*) skal gjelde for alle partisjoner  $P$ , også  $P_n$  for alle  $n$ , må vi kreve at  $I = L$  for at den skal være tilfredsstillt. Ingen andre valg av  $I$  vil oppfylle (\*). Vi har altså vist at  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$  med

$$\int_a^b f(x) dx = L$$

når  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = L$ .

- 3 Vi skal finne gjennomsnittsverdien til  $f$  over  $[-2, 2]$ . Den er gitt som (se Definisjon 4 side 309 i boka)

$$\bar{f} = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{3x} dx.$$

Vi vet at  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$  er den antideriverte til  $f(x)$  siden  $F'(x) = e^{3x} = f(x)$ . Fra analysens fundamentalteorem (*The Fundamental Theorem of Calculus*, side 311 i boka) følger det at

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{3x} dx = \frac{1}{4} (F(2) - F(-2)) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^{-6} \right) \\ &= \frac{1}{12} (e^6 - e^{-6}) = \frac{1}{6} \sinh(6) \approx 33.619. \end{aligned}$$

- 4 Vi bruker substitusjon, og lar  $u = x^3$ . Da har vi at  $du = 3x^2 dx$ . Innsatt i integralet får vi nå at

$$I = \int \frac{x^2}{2 + x^6} dx = \int \frac{3x^2}{3(2 + x^6)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{2 + u^2}.$$

Vi ser nå at  $u = x^3$  var et godt valg fordi vi står igjen med en enklere integrand som kun er avhengig av  $u$ . Vi gjenkjenner integranden,  $\frac{1}{2+u^2}$ , som den antideriverte til  $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$  (se punkt 16 øverst side 318 i boka). Altså har vi at

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Vi setter så inn igjen for  $u$ , og får at

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{6} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{2}\right) + C.$$

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.

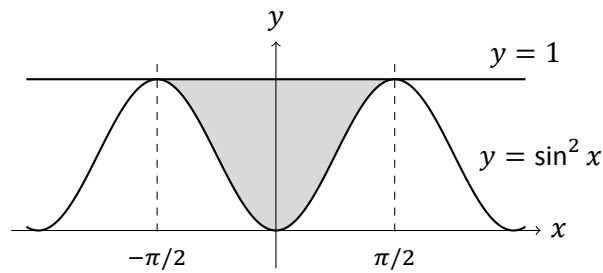
- 5 Me ser at funksjonen  $y = \frac{x}{x^2+16}$  er ikke-negativ for  $x \in [0, 2]$ . Dermed kan me finna arealet  $A$  til området avgrensa av  $y = \frac{x}{x^2+16}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  og  $x = 2$  ved å integrera den første avgrensinga med omsyn på  $x$  frå 0 til 2,

$$A = \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 16} dx.$$

Dette integralet kan løysast ved hjelp av substitusjonen  $u = x^2 + 16$ , som gjev  $du = 2x dx$ . Dermed får me svaret

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 16} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{16}^{20} \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} [\ln u]_{u=16}^{20} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

- 6 Vi skisserer først kurvene og finner området vi skal finne arealet av:



Vi er altså ute etter arealet,  $A$ , mellom kurvene  $y = 1$  og  $y = \sin^2 x$ , se det skraverte feltet i figuren over. Disse kurvene skjærer hverandre i  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ . Da er

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} dx - 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

Vi har her brukt at  $1 - \sin^2 x$  er en like funksjon slik at integralet over intervallet  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  er lik to ganger integralet over intervallet  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Videre gjenkjenner vi det første integralet som arealet av rektangelet gitt av linjene  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$  og  $x = \frac{\pi}{2}$ , mens det andre integralet er arealet under kurven  $y = \sin^2 x$  mellom  $x = -\frac{\pi}{2}$  og  $x = \frac{\pi}{2}$ . Det første integralet kan vi enkelt evaluere, mens for det andre bruker vi at  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  og at  $\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

$$\begin{aligned} A &= 2x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi - \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- 7 [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4100/eksamen/lf\\_tma4100\\_2014h.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2014h.pdf)