Anbefalte oppgaver uke 37

Høsten 2020

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi begynner med å skrive om ligningen litt, først til

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2+y}{y},$$

og så

$$xy - y^2 = x^3 + xy + x^2y + y^2,$$

eller

$$x^3 + x^2y + 2y^2 = 0.$$

Nå deriverer vi, og får

$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 4yy' = 0,$$

slik at

$$y' = \frac{-3x^2 + 2xy}{x^2 + 4y}.$$

$\boxed{2}$ Ligningen for tangentlinjen til en kurve i et gitt punkt (x_0, y_0), er gitt som

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Stigningstallet, m, er gitt som den deriverte av y med hensyn på x i punktet (x_0, y_0). Dette kan skrives som

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}.$$

Den oppgitte kurven lar seg ikke skrive på eksplisitt form. Derfor deriverer vi implisitt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x + 2y + 1) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x-1}\right) \\
\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2y) + \frac{d}{dx}(1) &= \frac{\frac{d}{dx}(y^2)(x-1) - y^2\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\
1 + 2\frac{dy}{dx} + 0 &= \frac{2y\frac{d}{dx}(y)(x-1) - y^2(1-0)}{(x-1)^2} \\
1 + 2\frac{dy}{dx} &= \frac{2y\frac{dy}{dx}(x-1) - y^2}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Vær spesielt oppmerksom på derivasjonen av y^2. Her må vi behandle y som en kjerne siden vi deriverer med hensyn på x, slik at vi får $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$ (og ikke bare $2y$).

Dersom vi hadde ønsket å finne $\frac{dy}{dx}$ uttrykt ved x og y, måtte vi nå ha løst dette uttrykket for $\frac{dy}{dx}$. Deretter kunne vi ha funnet m ved å sette inn for $(x, y) = (2, -1)$. Men siden vi kun er interessert i $\frac{dy}{dx}$ i dette punktet, kan vi sette inn for x og y før vi løser for $\frac{dy}{dx}$. Dette gir

$$\begin{aligned}
1+2\frac{dy}{dx} &= \frac{2(-1)\frac{dy}{dx}(2-1)-(-1)^2}{(2-1)^2} \\
1+2\frac{dy}{dx} &= -2\frac{dy}{dx}-1 \\
4\frac{dy}{dx} &= -2 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dette er nå den deriverte i punktet $(2,-1)$, så for å være helt nøyaktige bør vi skrive

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{1}{2}.$$

Vi er nå klare til å sette opp ligningen for tangentlinjen til kurven i punktet $(2,-1)$,

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)-1 = -\frac{1}{2}x.$$

$\boxed{3}$ Vi starter med å finne skjæringspunktene mellom ellipsen og hyperbelen. Hvis vi løser ligningen for ellipsen med hensyn på y^2 får vi

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Vi setter dette inn i ligningen for hyperbelen og løser med hensyn på x^2,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) &= 1 \\
x^2\left(\frac{1}{A^2}+\frac{b^2}{a^2B^2}\right) &= 1+\frac{b^2}{B^2} \\
x^2(a^2B^2+b^2A^2) &= A^2a^2B^2+b^2A^2a^2 \\
x^2 &= \frac{A^2a^2B^2+b^2A^2a^2}{a^2B^2+b^2A^2} = \frac{A^2a^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.
\end{aligned}$$

Observer nå at $x^2 \geq 0$ for alle a, b, A og B. Det må vi også kreve for at ligningen skal ha en løsning (vi kan ikke ta kvadratroten av noe negativt).

Vi setter så inn uttrykket for x^2 inn i uttrykket for y^2 og får at

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{A^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2}\right) = b^2\left(\frac{a^2B^2+b^2A^2-A^2B^2-A^2b^2}{a^2B^2+b^2A^2}\right) = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.$$

Tilsvarende som i sted, må vi kreve at $y^2 \geq 0$ for at vi skal ha en løsning. Vi ser at nevneren er positiv for alle a, b, A og B, mens vi må kreve at $a^2 \geq A^2$ for at telleren skal være positiv. Antakelsen fra oppgaven om at $a^2 \geq A^2$ er altså nødvendig for å sikre oss at vi faktisk har løsninger, det vil si at kurvene skjærer hverandre.

Det neste steget er å finne uttrykk for stigningstallet til tangentlinjene til de to kurvene. Stigningstallet er som vi husker lik $\frac{dy}{dx}$. Ingen av kurvene er gitt på eksplisitt form, så vi deriverer implisitt. Vi starter med ellipsen,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1)\\ \frac{2x}{a^2}+\frac{2y\frac{dy}{dx}}{b^2} &= 0\\ \frac{b^2}{a^2}x+y\frac{dy}{dx} &= 0\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

For hyperbelen får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1)\\ \frac{2x}{A^2}-\frac{2y\frac{dy}{dx}}{B^2} &= 0\\ \frac{B^2}{A^2}x-y\frac{dy}{dx} &= 0\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

La $m_e = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til ellipsen, og $m_h = \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til hyperbelen. For at de to tangentlinjene skal stå normalt på hverandre må vi ha at (se side 99 i læreboken)

$$m_e = -\frac{1}{m_h}.$$

Satt inn for m_e og m_h får vi

$$\begin{aligned}-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} &= -\frac{A^2}{B^2}\frac{y}{x}\\ \frac{b^2}{a^2}x^2 &= \frac{A^2}{B^2}y^2.\end{aligned}$$

Vi setter nå inn uttrykkene for x^2 og y^2 som beskriver skjæringspunktene, for å sjekke om ligningen ovenfor er tilfredstillt i disse punktene.

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{A^2a^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2} = \frac{A^2}{B^2}\frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.$$

Vi stryker alle like faktorer og står igjen med

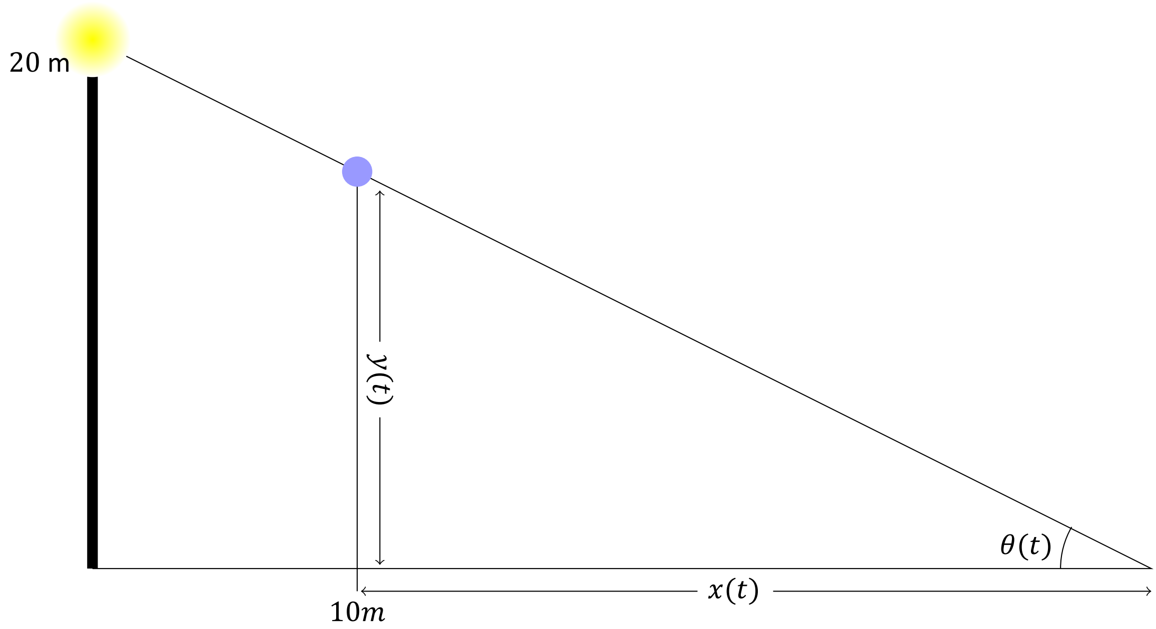
$$B^2+b^2 = a^2-A^2$$

eller

$$a^2-b^2 = A^2+B^2.$$

Dette er lik den andre antakelsen i oppgaven, og vi har vist at tangentlinjene til kurvene i skjæringspunktene står normalt på hverandre.

$\boxed{4}$ La tiden t være gitt i sekunder, og la $a = 9.8$ m/s^2. Vi innfører tre funksjoner, $x(t)$, $y(t)$ og $\theta(t)$, se figur. Oppgaven spør etter $x'(1)$, og $x'(t_s)$.



Veiformlene fra fysikken forteller oss at

$$y(t) = 20 - \frac{1}{2}at^2$$

Nå ser vi både at

$$\tan\theta = \frac{20}{10 + x(t)},$$

og at

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{20 - \frac{1}{2}at^2}{x(t)},$$

så

$$\frac{40}{10 + x(t)} = \frac{40 - at^2}{x(t)}.$$

Snur vi denne på hodet, får vi

$$\frac{10 + x(t)}{40} = \frac{x(t)}{40 - at^2},$$

og vi kan beregne

$$x(t) = \frac{400 - 10at^2}{at^2} = \frac{400}{at^2} - 10.$$

Hvis vi deriverer, får vi:

$$x'(t) = -\frac{800}{at^3}.$$

Når ballen har truffet bakken, er $y(t) = 0$, så vi kan beregne lett at for dette tidspunktet må $t = \sqrt{\frac{40}{a}}$. Vi setter til slutt in $t = 1$ og $t = \sqrt{\frac{40}{a}}$ i uttrykket for $x'(t)$, og får

$$x'(1) = -\frac{800}{a} \approx -81.63 \text{ m/s}$$

(her går det unna; skyggen starter jo på uendelig langt unna), og

$$x'\left(\sqrt{\frac{40}{a}}\right) = -\frac{800}{a \cdot \sqrt{\frac{40^3}{a^3}}} = -9.90 \text{ m/s}$$

Merk at fortegnene er negative, på grunn av vårt valg av koordinatsystem.

$\boxed{5}$ Denne oppgaven kan løses ved å bruke l'Hôpitals regel to ganger. Vi går gjennom dette grundig steg for steg.

La $f(x) = 1 - \cos x$ og $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Vi skal evaluere grensen $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, og ser at uttrykket er på ubestemt form av typen $[0/0]$. Vi vet at både f og g er deriverbare, så vi prøver å bruke l'Hôpitals regel. De deriverte er gitt ved

$$f'(x) = \sin x, \quad g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Vi har at $f'(0) = g'(0) = 0$, slik at vi fortsatt har et uttrykk på ubestemt form av typen $[0/0]$. Dersom vi deriverer funksjonene på nytt får vi at

$$f''(x) = \cos x, \quad g''(x) = \frac{(1 + x^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Altså er $f'(x)$ og $g'(x)$ deriverbare og vi ser at $g''(0) = 2 \neq 0$. Vi kan derfor benytte l'Hôpitals regel på grensen $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Siden vi nå har vist at $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer, vet vi fra l'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

OBS! Man kan gjøre dette fortløpende ved å derivere teller og nevner hver for seg inntil man ikke lenger har et uttrykk på ubestemt form, men man må da hele tiden sjekke at både teller og nevner faktisk er deriverbar på et åpent intervall rundt den verdien som x går mot og at også nevneren er ulik null i et slikt intervall.

$\boxed{6}$ Vi bruker l'Hôpital tre ganger, og får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

$\boxed{7}$ Vi starter med å finne den deriverte til f,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Vi har tre kategorier med kandidater til lokale og globale maksimum- og minimumsverdier:

(i) *Kritiske punkter*, der $f'(x) = 0$. Det finnes ingen x slik at $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} = 0$.

(ii) *Singulære punkter*, der $f'(x)$ ikke eksisterer. Vi ser at $f'(x)$ eksisterer i alle punkter utenom $x = 1$, men dette punktet ligger ikke i intervaller $[2, 3]$.

(iii) *Endepunkter* av definisjonsmengden. Vi har to endepunkter, $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$.

Vi regner til slutt ut funksjonsverdiene i alle kandidatene for å finne maksimum og minimum.

$$f(x_1) = \frac{1}{2-1} = 1, \quad f(x_2) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

Konklusjonen er at det globale maksimumet til f på intervallet $[2, 3]$ er 1, mens det globale minimumet er $\frac{1}{2}$. Det finnes ingen andre lokale ekstremverdier.

$\boxed{8}$ Vi starter med å regne ut de deriverte til f,

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x,$$
$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x.$$

Vi finner så de kritiske punktene der $f'(x) = 0$. Siden e^x aldri er null, må de kritiske punktene tilfredstille

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Denne andregradligningen har to løsninger,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3.$$

Vi har ingen singulære punkter siden $f'(x)$ eksisterer for alle x. Videre har vi heller ingen endepunkter da $f(x)$ er definert for alle x, det vil si $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Vi utfører andrederiverttesten,

$$f''(x_1) = (1+4-1)e^1 = 4e > 0,$$
$$f''(x_2) = (0-12-1)e^{-3} = -4e^{-3} < 0.$$

Vi konkluderer med at $x_1 = 1$ er et lokalt minimum, mens $x_2 = -3$ er et lokalt maksimum.