TMA4100 Matematikk 1

Skriftlig innlevering 4

Høsten 2020

Innleveringsfrist: 20. november, kl. 16.00.

1 Avgjør om rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\ln n}$$

konvergerer eller divergerer.

2 La u og v være to ikke-negative reelle tall sånn at $u \leq v$. Vi definerer to tallfølger $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursivt via

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

med $a_1 = u$ og $b_1 = v$.

a) Vis at

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

og forklar hvorfor dette viser at begge følgene konvergerer.

b) Vis at

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

og bruk dette til å vise at begge følgene konvergerer til en felles grense c.

3 **a)** Forklar hvorfor

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \text{ for } |x| < 1.$$

b) Vis at

$$\ln \frac{|1+x|}{|1-x|} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ for } |x| < 1.$$

(Vink: Delbrøksoppspalting.)

c) Vis at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} = \ln 3.$$

4 Funksjonen $f(x)$ oppfyller

$$f'(x) = xf(x), \qquad f(0) = 1.$$

a) Bruk induksjon til å vise at

$$f^{(n)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$$

for alle $n \geq 2$, og bruk dette til å finne maclaurinrekken (taylorrekken sentrert i 0) til $f(x)$. (Vink: Betrakt de jevne og odde potensene av maclaurinrekken separat. Verdien av $f'(0)$ viser at de odde leddene i maclaurinrekken forsvinner.)

b) Løs initialverdiproblemet

$$y' = xy, \qquad y(0) = 1,$$

og verifiser at svaret stemmer overens med svaret i **a)**.